

تمرین سری دهم

مدرس‌ان: دکتر مقدسی، دکتر جمالی، دکتر مستفید

تمرین ۱

مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید و رفتار جواب را وقتی $t \rightarrow \infty$ تشریح کنید.

$$x' = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

تمرین ۲

آ) دستگاه $tx' = Ax$ متناظر معادلات مرتبه دوم اویلر می‌باشد. فرض کنید $x = \xi t^r$ جواب معادله باشد. ξ و r را به دست آورید.

ب) معادله $x = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} tx'$ را با استفاده از قسمت قبل حل کنید.

تمرین ۳

دستگاه $x' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -\alpha & -1 \end{bmatrix} x$ را در نظر بگیرید.

آ) دستگاه را به ازای $\alpha = \frac{1}{3}$ حل کنید. نوع نقطه تعادلی در مبدا را تعیین کنید.

ب) دستگاه را به ازای $\alpha = 2$ حل کنید. نوع نقطه تعادلی در مبدا را تعیین کنید.

ج) در دو بخش قبل دیدید که به ازای α های مختلف دستگاه دو رفتار کاملاً متمایز دارد. مقداری از α را پیدا کنید که نوع رفتار دستگاه در آن عوض می‌شود.

تمرین ۴

جواب عمومی دستگاه زیر را بر حسب تابع‌های حقیقی مقدار بیان کنید.

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} x$$

تمرین ۵

آ) ماتریس اساسی $\Phi(t)$ را برای دستگاه زیر طوری بیابید که در شرط $\Phi(0) = I$ صدق کند.

$$x' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} x$$

ب) مساله مقدار اولیه

$$x' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

را با استفاده از ماتریس اساسی حل کنید.

تمرین ۶

برای دستگاه $x' = Ax$ جواب‌های مستقل خطی بیابید و سپس ماتریس اساسی آن را بنویسید. در آخر با شکل ماتریس T که ستون‌های آن بردار ویژه ماتریس ضرائب است (بردار ویژه معمولی یا تعمیم یافته) و به دست آوردن ماتریس $J = T^{-1}AT$ فرم ژردان آن را حساب کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{آ})$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$