

## سری اول تمرینات

## تمرین ۱

میدان جهتی هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر را رسم کنید، سپس رفتار جواب را هنگامی که  $t \rightarrow \infty$  میل می کند بررسی کنید و در آخر وابستگی جواب  $y$  را به مقدار اولیه در لحظه  $t = 0$  بررسی کنید.

$$y' = 3 - 2y$$

$$y' = 2y$$

$$y' = y(4 - y)$$

## تمرین ۲

مطلوبست تعیین مقادیر  $a$  و  $b$  در معادله دیفرانسیل  $y' = ay + b$  بطوریکه در  $t \rightarrow \infty$  داشته باشیم:

(آ) همه جوابها به  $y = 3$  میل کند

(ب)  $y = 2$  جواب معادله باشد و جوابهای دیگر از آن دور شوند.

## تمرین ۳

دریاچه‌ای در ابتدا حاوی یک میلیون لیتر آب و مقداری نامشخص از یک ماده شیمیایی نامطلوب است. آبی که شامل  $0.01$  گرم از این ماده شیمیایی در هر لیتر آن است، با نرخ  $300 \frac{L}{h}$  به داخل دریاچه جریان دارد. مایع مخلوط با همان نرخ خارج می شود، بنابراین مقدار آب در دریاچه ثابت می ماند، فرض کنید که ماده شیمیایی به طور یکنواخت درون دریاچه توزیع شده است.

(آ) یک معادله دیفرانسیل برای مقدار ماده شیمیایی موجود در دریاچه در هر زمان بنویسید.

(ب) پس از مدتی طولانی، چه مقدار از ماده شیمیایی در دریاچه وجود خواهد داشت؟ آیا این مقدار حدی به مقداری که در ابتدا موجود بوده بستگی دارد؟

### تمرین ۴

طبق قانون سرد شدن نیوتن، دمای شیء با نرخ متناسب با تفاضل دمای شیء و دمای محیط اطرافش (معمولا، دمای هوای محیط) تغییر می‌کند. فرض کنید درجه حرارت محیط ۲۴ درجه سلسیوس است و نرخ ثابت برابر است با  $^{-1} (0.05)$  دقیقه. یک معادله دیفرانسیل برای حرارت شیء در هر زمان بنویسید. توجه کنید که معادله دیفرانسیل، چه دمای شیء بالاتر از دمای محیط باشد و چه پایین تر، تغییری نمی‌کند.

### تمرین ۵

مساله مقدار اولیه  $y(0) = y_0$ ,  $y' = 2y - 10$  را حل کنید و جواب‌های مختلف را با توجه به شرط اولیه بررسی کنید.

### تمرین ۶

معادله دیفرانسیل  $y' = -ay + b$  را در نظر بگیرید که در آن  $a$  و  $b$  هر دو اعدادی مثبت هستند.

(آ) معادله دیفرانسیل را حل کنید.

(ب) جواب را به ازای چند شرط اولیه مختلف رسم کنید.

(ج) تشریح کنید اگر  $a$  یا  $b$  افزایش یابند جواب‌ها چگونه تغییر می‌کند؟ هر دوی آنها افزایش یابند اما نسبت  $\frac{b}{a}$  ثابت بماند چطور؟

### تمرین ۷

فرض کنید جمعیت موش‌های صحرایی در معادله دیفرانسیل  $\frac{dp}{dt} = 0.5p - 450$  صدق می‌کند که در آن  $p(t)$  جمعیت موش‌های صحرایی در زمان  $t$  می‌باشد.

(آ) اگر  $p(0) = 850$ ، زمانی را که جمعیت از بین می‌رود پیدا کنید.

(ب) اگر  $p(0) = p_0$  و  $0 < p_0 < 900$  زمان نابودی را پیدا کنید.

(ج) اگر جمعیت در عرض یک‌سال نابود شود، جمعیت اولیه  $p_0$  را پیدا کنید.

### تمرین ۸

در تمرین قبل فرض کنید که جمعیت موش صحرایی با نرخ متناسب با جمعیت فصلیش تغییر می‌کند، یعنی  $\frac{dp}{dt} = rp$

(آ) اگر جمعیت در ۲۰ روز دوبرابر شود، نرخ ثابت  $r$  را بیابید.

(ب)  $r$  را طوری بیابید که جمعیت در  $N$  روز دوبرابر شود.

تمرین ۹

نصف عمر یک ماده رادیو اکتیو، زمان مورد نیاز برای واپاشی این ماده و کاهش آن به نصف مقدار اولیه‌اش است. ثابت کنید که به ازای هر ماده رادیواکتیو که طبق معادله  $Q' = -rQ$  فرو می‌پاشد، نصف عمر  $T$  و نرخ واپاشی  $r$  در معادله  $rT = \ln 2$  صدق می‌کنند. اگر رادیوم-۲۲۶ دارای نصف عمری برابر با ۱۶۲۰ سال باشد. آنگاه دوره زمانی‌ای را مشخص کنید که در طول آن، ماده به یک چهارم مقدار اولیه‌اش کاهش می‌یابد.