تمرینات سری هشتم

درس ریاضی مهندسی

بهار ۱۴۰۰

به نام پروردگار یکتا

# اعداد مختلط - خواص مقدماتی

در این بخش دوره ای کوتاه بر مبحث اعداد مختلط خواهیم داشت. این مباحث صرفا یک دوره ای کوتاه در مورد مباحث ابتدایی اعداد مختلط است.

**سوال ۱** در هریک از قسمت های زیر عدد مختلط داده شده را به فرم $a+bi$ بنویسید که در آن $a,b$ اعدادی حقیقی هستند.

(آ)

$$(x+iy)^{۲}$$

(ب)

$$i(\overline{۲+i})^{۲}$$

(ج)

$$(\frac{۱}{۲}+i\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۱۱}$$

(د)

$$\frac{۱۴+۱۳i}{۲-i}$$

(ه)

$$\frac{(۲-i)(۳+i)(۴+i)^{۲}}{\overline{۱+i}}$$

(و)

$$i^{۱۲}+i^{۲۵}-۷i^{۱۱۱}$$

**سوال ۲** هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید.

(آ)

$$\left|(۱-i)(۱+i)(۱+۳i)\right|$$

(ب)

$$\left|\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+i\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲۷}\right|$$

(ج)

$$\left|\frac{(۱+i)^{۵}}{(۲-۳i)^{۶}}\right|$$

**سوال ۳** (سوال مهم) در هریک از مسائل زیر تعدادی ناحیه توسط معادلات و یا نامساوی هایی در صفحه مختلط توصیف شده اند. هریک از این ناحیه ها را در صفحه مختلط نمایش دهید.

(آ)

$$\left|z+۲+i\right|=۴$$

(ب)

$$\left|۲z\right|+\left|۲z-۱\right|=۴$$

(ج)

$$۱<\left|z-۲i\right|\leq ۴$$

(د)

$$\left|z+۱\right|+\left|z-۱\right|\geq ۹$$

(ه)

$$(a+b)z+(a-b)\overline{z}=c$$

که در آن $a,b,c$ اعدادی حقیقی هستند.

(و)

$$\mathrm{Re}(z^n)>۰$$

(ز)

$$\mathrm{Re}(z^n)-\mathrm{Im}(z^n)\leq ۰$$

در قسمت های (و) و (ز) پیشنهاد می شود از مختصات قطبی برای شناسایی ناحیه استفاده کنید.

(ح)

$$\left|z-۱-i\right|=\mathrm{Re}(z)+۱$$

(ط)

$$\mathrm{Re}(\frac{۱}{z}) < ۱$$

(ی)

$$\left|\arg(z)\right| < \frac{\pi}{۴}$$

یادآوری می کنیم که آرگومان اصلی عدد مختلط $z$ که آن را با $\mathrm{Arg}(z)$ نمایش می دهیم طبق قرارداد کتاب در رابطه $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$ صدق می کند. توجه کنید که $\mathrm{Arg}(z)$ و $\arg(z)$ با یکدیگر یک تفاوت جزئی دارند. در واقع $\mathrm{Arg}(z)$ نماینده ای از زاویه ای است که با دید قطبی راستای عدد مختلط $z$ را تعیین می کند و $\arg(z)$ مجموعه متشکل از تمامی زاویه هایی است که راستای عدد مختلط $z$ را در مختصات قطبی تعیین می کنند:

$$\arg(z) = \left\{۲k\pi + \mathrm{Arg}(z) : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

**سوال ۴** هریک از معادلات زیر را در دستگاه اعداد مختلط حل کنید.

(آ)

$$\lambda(\overline{z} + z^n) = i(\overline{z} - z^n)$$

که در آن $\lambda$ عددی حقیقی و $n \geq ۲$ عددی طبیعی است.

(ب)

$$(۱ + \sqrt{۳}i)(z + i)^n = (۱ - \sqrt{۳}i)(z - i)^n$$

(ج)

$$z^۴ - ۶z^۳ + ۱۸z^۲ - ۲۶z + ۲۱ = ۰$$

می توانید فرض کنید که $z = ۲ - \sqrt{۳}i$ یکی از ریشه های معادله فوق است.

**سوال ۵** (سوال مهم) نشان دهید تمامی ریشه های معادله $۱ + ۲z + ۳z^۲ + \cdots + nz^{n-۱} = ۰$ درون دایره واحد قرار دارند.

راهنمایی: هرگاه $p(z) = ۱ + ۲z + ۳z^۲ + \cdots + nz^{n-۱}$ آنگاه $(۱ - z)p(z)$ را بررسی کنید.

**سوال ۶** فرمول صریحی برای عبارت زیر پیدا کنید:

$$\sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} \sin kx$$

# توابع تحلیلی

یادآوری می کنیم که تابع مختلط $f : \mathrm{D} \to \mathrm{C}$ که در آن $\mathrm{D} \subseteq \mathrm{C}$ یک دامنه است را در نقطه $z_\circ \in \mathrm{D}$ تحلیلی می نامیم هرگاه حد زیر وجود داشته باشد:

$$\lim_{z\to z_\circ} \frac{f(z)-f(z_\circ)}{z-z_\circ} = \lim_{h\to\circ} \frac{f(z_\circ+h)-f(z_\circ)}{h}$$

و در صورت وجود این حد آن را با $f'(z_\circ)$ نمایش می دهیم. توجه داشته باشید که شرط لازم برای تحلیلی بودن $f$ در $z_\circ = x_\circ + iy_\circ$ برقراری روابط کشی- ریمان در $(x_\circ, y_\circ)$ است. اگر $f(z) = f(x+yi) = u(x,u) + iv(x,y)$ آنگاه برای تحلیلی بودن $f$ در $z_\circ$ لازم است که حتما روابط زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_\circ, y_\circ) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_\circ, y_\circ) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_\circ, y_\circ) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_\circ, y_\circ) \end{cases}$$

که روابط فوق به روابط کشی- ریمان در مختصات دکارتی معروف هستند.

اگر تابع مختلط $f$ را در مختصات قطبی به فرم $f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ نمایش دهیم آنگاه برای تحلیلی بودن $f$ در $z_\circ = r_\circ e^{i\theta_\circ}$ لازم است که حتما روابط کشی- ریمان در مختصات قطبی به شرح زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases} r_\circ \dfrac{\partial u}{\partial r}(r_\circ, \theta_\circ) = \dfrac{\partial v}{\partial \theta}(r_\circ, \theta_\circ) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \theta}(r_\circ, \theta_\circ) = -r_\circ \dfrac{\partial v}{\partial r}(r_\circ, \theta_\circ) \end{cases}$$

و در صورتی که تمامی مشتق های جزئی از مرتبه اول $u$ و $v$ نسبت به متغیر های $x, y$ در مختصات دکارتی و یا $r, \theta$ در مختصات قطبی موجود بوده و در $z_\circ$ پیوسته باشند و روابط کشی- ریمان نیز برقرار باشند می توان نتیجه گرفت که $f$ در $z_\circ$ تحلیلی می باشد.

اکنون به بررسی تعدادی سوال می پردازیم.

**سوال ۷** تمامی نقاطی از صفحه مختلط که تابع $u$ در آن نقاط تحلیلی هستند را بیابید.

$$u(z) = u(x+iy) = \begin{cases} x & |y| > |x| \\[2ex] -x & |y| \le |x| \end{cases}$$

**سوال ۸** نشان دهید تابع $f(z) = f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$ تابعی پیوسته بوده و در $z_\circ = \circ$ در روابط کشی- ریمان صدق می کند. ولی $f$ در $z_\circ = \circ$ تحلیلی نیست.

**سوال ۹** (سوال مهم) تمام نقاطی از صفحه مختلط را مشخص کنید که تابع زیر در آن نقاط تحلیلی بوده و مشتق تابع را در آن نقاط بدست آورید.

$$f(z)=\begin{cases} z & |z|\leq ۱ \\ z^۲ & |z|>۱ \end{cases}$$

**سوال ۱۰** با استفاده از روابط کشی- ریمان روی مختصات قطبی نشان دهید تابع شاخه اصلی لگاریتم:

$$\text{Log}(z)=\ln|z|+i\text{Arg}(z)$$

روی مجموعه $\mathrm{C}-\{x\in\mathbb{R}:x\leq ۰\}$ تحلیلی است و روی این دامنه داریم:

$$(\text{Log}(z))'=\frac{۱}{z}$$

**سوال ۱۱** (سوال مهم) با استفاده از روابط کشی- ریمان روی مختصات قطبی نشان دهید تابع شاخه اصلی ریشه $n$-ام:

$$f(z)=f(re^{i\theta})=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$$

روی دامنه $\{re^{i\theta}:r>۰,۰<\theta<\pi\}$ تحلیلی است.

**سوال ۱۲** (سوال مهم) تمامی نقاطی از صفحه مختلط را بدست آورید که تابع $f$ با ضابطه:

$$f(z)=z^۳+۲|z|^۲+\overline{z}$$

در آن نقاط تحلیلی باشند. پیشنهاد می شود مسئله فوق را به مختصات قطبی منتقل کنید چرا که ممکن است محاسبات در مختصات دکارتی نسبتا پیچیده باشد.

**سوال ۱۳** (سوال مهم) تابع $f$ با ضابطه:

$$f(z)=f(x+iy)=(ax^۳+bx^۲y+cxy^۲+dy^۳)+i(ey^۳+fxy^۲+gx^۲y+hx^۳)$$

روی کل صفحه مختلط تحلیلی است. تمامی مقادیر ممکن برای ثابت های $a,b,,c,d,e,f,g,h$ را بدستآورید.

**سوال ۱۴** فرض کنید $f$ تابعی تحلیلی روی کل صفحه مختلط باشد. در اینصورت نشان دهید تابع $g$ که با ضابطه $g(z)=\overline{f(\overline{z})}$ تعریف شده نیز روی تمامی صفحه مختلط تحلیلی است.

پیشنهاد می شود به روابط کشی- ریمان رجوع نکنید و این مسئله را بطور مستقیم و با استفاده از تعریف تحلیلی بودن توابع بررسی کنید.

**سوال ۱۵** تابعی پیوسته روی کل صفحه مختلط طوری تعیین کنید که روی هذلولی $x^۲ - y^۲ = ۱$ تحلیلی باشد ولی در سایر نقاط صفحه مختلط تحلیلی نباشد.

**سوال ۱۶** (سوال مهم) تابعی پیوسته روی کل صفحه مختلط طوری تعیین کنید که روی نیم دایره $y = \sqrt{۱ - x^۲}$ تحلیلی بوده ولی در سایر نقاط صفحه مختلط تحلیلی نباشد.