تمرینات سری هفتم

درس ریاضی مهندسی

بهار ۱۴۰۰

به نام پروردگار یکتا

حل معادلات روی نواحی نامتناهی و روش تبدیلات فوریه

در این قسمت به بررسی تعدادی سوال در ارتباط با حل معادلات روی نواحی غیر کراندار با استفاده از روش تبدیلات فوریه می پردازیم

سوال ۱ تابع u به ازای $x \geq 0$ و $y \in (-\infty, \infty)$ تعریف شده و در در مسئله زیر صدق می کند. تابع u را بیابید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x > 0, \quad y \in (-\infty, \infty) \\ u(0, y) = e^{-7|y|} & y \in (-\infty, \infty) \\ |u| < \infty \end{cases}$$

شرط انتهایی بدان معنا است که u روی دامنه تعریف خود کراندار باقی می ماند. همچنین صرفا u را به یک فرم انتگرالی نمایش دهید.

سوال ۲ (سوال مهم) تابع u روی دامنه مشخص شده توسط شرایط $0 \leq x \leq 1$ و $y \in (-\infty, \infty)$ تعریف شده و در مسئله زیر صدق می کند. تابع u را بیابید. همانند مسئله قبل نمایش u به یک فرم انتگرالی کافی است.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & 0 < x < 1, \quad y \in (-\infty, \infty) \\ u(0, y) = 0 & y \in (-\infty, \infty) \\ u(1, y) = \begin{cases} 5 & |y| < 1 \\ 0 & |y| > 1 \end{cases} \end{cases}$$

سوال ۳ (سوال مهم) تابع u در یک- چهارم صفحه مختصات که توسط روابط $x \geq 0$ و $y \geq 0$ مشخص می شود تعریف شده است و در مسئله زیر صدق می کند. تابع u را به فرم انتگرالی بیابید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x > 0, \quad y > 0 \\ u(x,0) = e^{-(x+4)} & x > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 & y > 0 \end{cases}$$

سوال ۴ نشان دهید پاسخ مسئله لاپلاس روی نیم صفحه بالایی:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & y > 0, \quad -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

به شرح زیر است:

$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \frac{2y}{(x-\lambda)^2 + y^2} d\lambda$$

احتمالا در این سوال باید نحوه ارتباط تبدیل فوریه پیچش دو تابع با تبدیلات فوریه خود توابع استفاده شود.

سوال ۵ (سوال مهم) مسئله انتشار موج زیر روی یک سیم بطول نامتناهی را با استفاده از روش تبدیل فوریه حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0, \quad -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2} & -\infty < x < \infty \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

سوال ۶ مسئله انتشار موج زیر روی یک سیم بطول نامتناهی را با استفاده از روش تبدیل فوریه حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0, \quad -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = \begin{cases} \cos x & |x| \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

سوال ۷ مسئله انتقال حرارت زیر را بر روی سیم نامتناهی با استفاده از روش تبدیلات فوریه حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0, \quad -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = e^{-x^2} & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

سوال ۸ (سوال مهم) مسئله انتقال حرارت زیر را بر روی سیم نامتناهی با استفاده از روش تبدیلات فوریه حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0, \quad -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{2} & |x| \leq 2 \\ 0 & |x| > 2 \end{cases} \end{cases}$$