معادلات لاپلاس و پواسون در ناحیه های مکعبی شکل

در این قسمت به بررسی تعدادی سوال در ارتباط با معادلات لاپلاس و پواسون در ناحیه های مکعبی شکل می پردازیم

$\boxed{\textbf{سوال ۱}}$ مسئله زیر را با استفاده از روش جداسازی حل کنید.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < z < 1 \\ u(0, y, z) = u(1, y, z) = 0 & 0 < y < 1, \quad 0 < z < 1 \\ u(x, 0, z) = u(x, 1, z) = 0 & 0 < x < 1, \quad 0 < z < 1 \\ u(x, y, 0) = 0 & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ u(x, y, 1) = xy & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{سوال ۲}}$ مسئله زیر را با استفاده از روش جداسازی حل کنید.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \quad 0 < z < 3 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y, z) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1, y, z) = 0 & 0 < y < 2, \quad 0 < z < 3 \\ u(x, y, 0) = u(x, y, 3) = 0 & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 0, z) = 0 & 0 < x < 1, \quad 0 < z < 3 \\ u(x, 2, z) = \sin \pi x & 0 < x < 1, \quad 0 < z < 3 \end{cases}$$

سوال ۳ مسئله زیر را با استفاده از روش جداسازی حل کنید.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = xyz & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \quad 0 < z < \pi \\ u(x,y,0) = \dfrac{\partial u}{\partial z}(x,y,\pi) = 0 & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \\ u(x,0,z) = u(x,\pi,z) = 0 & 0 < x < \pi, \quad 0 < z < \pi \\ u(0,y,z) = 0 & 0 < y < \pi, \quad 0 < z < \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,y,z) = z & 0 < y < \pi, \quad 0 < z < \pi \end{cases}$$

سوال ۴ مسئله زیر را با استفاده از روش جداسازی حل کنید.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 1 & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \quad 0 < z < \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}(x,y,0) = \dfrac{\partial u}{\partial z}(x,y,\pi) = 0 & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0,z) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,\pi,z) = 0 & 0 < x < \pi, \quad 0 < z < \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y,z) = 0 & 0 < y < \pi, \quad 0 < z < \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,y,z) = \cos z & 0 < y < \pi, \quad 0 < z < \pi \end{cases}$$

معادلات لاپلاس در ناحیه های استوانه ای شکل

در این قسمت به بررسی تعدادی مسئله در مورد معادلات لاپلاس در مختصات استوانه ای می پردازیم. یادآوری می کنیم که لاپلاسین در مختصات استوانه ای عبارت است از:

$$\nabla^2 u(r,\theta,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

در این قسمت جواب هایی را در نظر می گیریم که مستقل از متغیر θ است و شرط مرزی دیریکله نیز روی مسئله اعمال میکنیم.

سوال ۵ پاسخ $u(r,z)$ را از مسئله زیر بدست آورید.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & 0 < r < 1, \quad 0 < z < 2 \\ u(r,0) = 0 & 0 < r < 1 \\ u(1,z) = 0 & 0 < z < 2 \\ u(r,2) = 100 - r^2 & 0 < r < 1 \end{cases}$$

سوال ۶ پاسخ $u(r,z)$ را از مسئله زیر بدست آورید.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & 0 < r < 1, \quad 0 < z < 2 \\ u(r,0) = 100 & 0 < r < 1 \\ u(1,z) = 10z & 0 < z < 2 \\ u(r,2) = 100 & 0 < r < 1 \end{cases}$$

سوال ۷ پاسخ $u(r,z)$ را از مسئله زیر بدست آورید.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & 0 < r < 1, \quad 0 < z < 2 \\ u(r,0) = 0 & 0 < r < 1 \\ u(1,z) = 0 & 0 < z < 2 \\ u(r,2) = 70 J_0(r) & 0 < r < 1 \end{cases}$$

که در آن J_0 تابع بسل مرتبه صفر است:

$$J_0(r) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m r^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}$$

یادآوری می کنیم که پاسخ مسئله دیریکله روی استوانه که بصورت زیر مدل شده است:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & 0 < r < a, \quad 0 < z < h \\ u(r,0) = 0 & 0 < r < a \\ u(a,z) = 0 & 0 < z < h \\ u(r,h) = f(r) & 0 < r < a \end{cases}$$

با فرض اینکه پاسخ مستقل از متغیر θ است بدین شرح بدست می آید:

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_n J_0(\lambda_n r)\sinh(\lambda_n z)$$

که در آن با فرض اینکه α_n برابر با n-امین ریشه مثبت تابع بسل مرتبه صفر J_0 باشد داریم $\lambda_n=\dfrac{\alpha_n}{a}$ و:

$$\mathrm{A}_n=\frac{2}{\sinh(\lambda_n h)a^2 J_1^2(\alpha_n)}\int_0^a f(r)J_0(\lambda_n r)rdr$$

که در آن J_1 تابع بسل مرتبه اول می باشد:

$$J_1(x)=\frac{x}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m+1)!\,m!}$$