تمرینات سری پنجم

درس ریاضی مهندسی

بهار ۱۴۰۰

به نام پروردگار یکتا

معادلات لاپلاس و پواسون در مختصات قطبی

در این قسمت به بررسی تعدادی سوال در مورد معادلات لاپلاس و پواسون در مختصات قطبی می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که فرم لاپلاسین در مختصات قطبی عبارت است از:

$$\nabla^2 u(r,\theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r,\theta)$$

سوال ۱ فرض کنید $r_0 > 0$ عددی ثابت باشد. مسئله دیریکله زیر را به ازای شرایط مرزی مشخص شده حل کنید:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & 0 < r < r_0, \quad 0 < \theta < 2\pi \\ u(r_0,\theta) = f(\theta) & 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

(آ)

$$f(\theta) = \frac{\pi - \theta}{2}$$

(ب)

$$f(\theta) = \theta \sin 2\theta$$

سوال ۲ فرض کنید $r_0 > 0$. مسئله با شرط مرزی نیومن زیر را به ازای شرایط مرزی داده شده حل کنید.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & 0 < r < r_0, \quad 0 < \theta < 2\pi \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(r_0,\theta) = f(\theta) & 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

(آ)

$$f(\theta) = 2$$

(ب)

$$f(\theta) = e^{\theta}$$

توجه داشته باشید که $\vec{n}$ بردار یکه برونسو در راستای شعاعی است و $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \vec{\nabla} u . \vec{n}$.

سوال ۳ فرض کنید $0 < r_0 < r_1$. مسئله دیریکله زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & r_0 < r < r_1, \quad 0 < \theta < 2\pi \\ u(r_0, \theta) = \theta^2 & 0 < \theta < 2\pi \\ u(r_1, \theta) = 4 & 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

سوال ۴ فرض کنید $0 < r_0 < r_1$. مسئله با شرط مرزی نیومن داده شده را حل کنید.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & r_0 < r < r_1, \quad 0 < \theta < 2\pi \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(r_0, \theta) = 0 & 0 < \theta < 2\pi \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(r_1, \theta) = 1 - \theta & 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

سوال ۵ مسئله دیریکله زیر را حل کنید. فرض کنید $r_0 > 0$.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & 0 < r < r_0, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ u(r, 0) = r^2 & 0 < r < r_0 \\ u(r, \frac{\pi}{2}) = 0 & 0 < r < r_0 \\ u(r_0, \theta) = \theta & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

سوال ۶ مسئله زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = r\theta & 0 < r < 2, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \\ u(r, 0) = 1 & 0 < r < 2 \\ u(r, \frac{\pi}{3}) = 1 - r & 0 < r < 2 \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(2, \theta) = e^{2\theta} & 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

سوال ۷ مسئله زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \theta & 1 < r < 2, \quad \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3} \\ u(r, \frac{\pi}{4}) = 1 & 1 < r < 2 \\ u(r, \frac{\pi}{3}) = 2 & 1 < r < 2 \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(1, \theta) = \theta & \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3} \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(2, \theta) = 0 & \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

همانند معادلات پواسون در ناحیه های مستطیلی شکل در مختصات قطبی نیز برای حل معادلات پواسون پیشنهاد می‌شود که مسئله را به دو زیرمسئله تقسیم کنید. یکی حل معادله لاپلاس با شرایط مرزی داده شده توسط مسئله و دیگری حل معادله پواسون لیکن با شرایط مرزی تماما صفر.

مسئله انتقال حرارت در ناحیه های دو بعدی مستطیلی

در این قسمت مسائلی مرتبط با انتقال حرارت روی ناحیه های مستطیلی شکل که دارای یک توزیع دمای اولیه می‌باشد را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

سوال ۸ با استفاده از روش جداسازی مسئله انتقال حرارت زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad t > 0 \\ u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0 & 0 < y < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0 & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, y, 0) = x(1-x)y(1-y) & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \end{cases}$$

سوال ۹ با استفاده از روش جداسازی مسئله انتقال حرارت زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y, t) = 0 & 0 < y < 1, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1, t) = 0 & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, y, 0) = \sin \pi x \sin \pi y & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \end{cases}$$

سوال ۱۰ همانند مسائل انتقال حرارت یک بعدی در مسائل انتقال حرارت دو بعدی نیز ممکن است با شرایط مرزی دیریکله (یا نیومن) ناصفر روبرو شویم. اما پیچیدگی حل مسئله انتقال حرارت دو بعدی با شرایط مرزی ناصفر اغلب بسیار پیچیده تر از حالت یک بعدی است. همانطور که در ادامه توضیح می‌دهیم علت این پیچیدگی دقیقا عبارت $\nabla^2 u$ است که در مسائل انتقال حرارت ظاهر می شود و وقتی مسئله ای در بعد ۲ یا بیشتر داشته باشیم همان عبارت معروف لاپلاسین است که عامل پیچیدگی حل مسائل انتقال حرارت با شرایط مرزی ناصفر است.

اکنون فرض کنید مسئله انتقال حرارتی ناهمگن با شرایط مرزی دیریکله ناصفر بدین شرح داشته باشیم:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u + q(x,y,t) & 0 < x < L, \quad 0 < y < H, \quad t > 0 \\
u(x,0,t) = T_1(x) & 0 < x < L, \quad t > 0 \\
u(x,H,t) = T_2(x) & 0 < x < L, \quad t > 0 \\
u(0,y,t) = S_1(y) & 0 < y < H, \quad t > 0 \\
u(L,y,t) = S_2(y) & 0 < y < H, \quad t > 0 \\
u(x,y,0) = f(x,y) & 0 < x < L, \quad 0 < y < L
\end{cases}
$$

فرض کنید $v^\star(x,y)$ جواب معادله لاپلاس $\nabla^2 v^\star = 0$ باشد که در شرایط مرزی:

$$
v^\star(x,0) = T_1(x), \quad v^\star(x,H) = T_2(x), \quad v^\star(0,y) = S_1(y), \quad v^\star(L,y) = S_2(y)
$$

صدق می کند. نشان دهید جواب مسئله انتقال حرارت بیان شده بصورت $u(x,y,t) = v^\star(x,y) + v(x,y,t)$ است که $v(x,y,t)$ جواب مسئله انتقال حرارتی با شرط مرزی صفر است (ولی صورت خود معادله ممکن است دارای جمله ناهمگن باشد). این معادله را پیدا کنید.

کمی توضیحات: نکته بیان شده برای هر نوعی از شرایط مرزی (چه دیریکله و چه نیومن و چه ترکیبی از این دو) برقرار می باشد. همچنین در صورتی که شرایط مرزی مسئله وابستگی به متغیر زمانی t نیز داشته باشند می‌توان ابتدا با تثبیت کردن متغیر زمانی t ابتدا جواب $v_t^\star$ از معادله لاپلاس با شرایط مرزی داده شده را بدست آورد و جواب معادله داده شده را یافت. لیکن از آنجایی که این روش نسبتا پیچیده است از فرمول بندی این روش صرف نظر می کنیم.

سوال ۱۱ با استفاده از روش جداسازی مسئله انتقال حرارت دو بعدی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad t > 0 \\ u(x,0,t) = 0 & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x,1,t) = 100 & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0 & 0 < y < 1, \quad t > 0 \\ u(x,y,0) = \sin \pi x & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \end{cases}$$

سوال ۱۲ با استفاده از روش جداسازی پاسخ مسئله انتقال حرارت دو بعدی زیر را پیدا کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad t > 0 \\ u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0 & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,y,t) = e^t y & 0 < y < 1, \quad t > 0 \\ u(1,y,t) = 0 & 0 < y < 1, \quad t > 0 \\ u(x,y,0) = 1 & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \end{cases}$$

مسئله انتشار موج در ناحیه های دو بعدی مستطیلی

در این قسمت تعدادی مسئله مربوط به انتشار موج در ناحیه های مستطیلی را مورد بررسی قرار خواهیم داد. ایده حل مسائل ناهمگن (و همچنین با شرط مرزی ناصفر) در مسائل انتشار موج کاملا مشابه با مسائل انتقال حرارت دو بعدی می باشد. لذا از بیان توضیحات اضافه صرف نظر می کنیم.

سوال ۱۳ با استفاده از روش جداسازی مسئله انتشار موج دو بعدی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\pi^2}\nabla^2 u & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad t > 0 \\ u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0 & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0 & 0 < y < 1, \quad t > 0 \\ u(x,y,0) = 0 & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = 1 & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \end{cases}$$

سوال ۱۴ با استفاده از روش جداسازی مسئله انتشار موج دو بعدی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\pi^2}\nabla^2 u & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1,t) = 0 & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y,t) = 0 & 0 < y < 1, \quad t > 0 \\ u(x,y,0) = \sin 3\pi x \sin \pi y & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = 0 & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \end{cases}$$

سوال ۱۵ با استفاده از روش جداسازی مسئله انتشار موج دو بعدی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\pi^2}\nabla^2 u & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1,t) = 0 & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y,t) = 0 & 0 < y < 1, \quad t > 0 \\ u(x,y,0) = x(1-x)y(1-y) & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \sin \pi x \sin 2\pi y & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \end{cases}$$

سوال ۱۶ با استفاده از روش جداسازی مسئله انتشار موج دو بعدی داده شده را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u + txy & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \quad t > 0 \\ u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0 & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,y,t) = 0 & 0 < y < \pi, \quad t > 0 \\ u(\pi,y,t) = e^t \sin y & 0 < y < \pi, \quad t > 0 \\ u(x,y,0) = x & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = y & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \end{cases}$$

سوال ۱۷ با استفاده از روش جداسازی مسئله انتشار موج دو بعدی داده شده را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\nabla^2 u & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0,t) = \sin \pi x & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1,t) = 0 & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y,t) = 0 & 0 < y < 1, \quad t > 0 \\ u(x,y,0) = \cos 2\pi x & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \cos 2\pi y & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \end{cases}$$