تمرینات سری سوم

درس ریاضی مهندسی

زمستان ۹۹

به نام پروردگار یکتا

تبدیلات فوریه و تبدیلات وارون فوریه

در این قسمت یک یادآوری مختصر از مباحث تبدیلات فوریه که به سه بخش **تبدیل فوریه نمایی** و **تبدیل فوریه کسینوسی** و **تبدیل فوریه سینوسی** تقسیم می شود ارائه می‌دهیم.

تبدیل فوریه نمایی و تبدیل فوریه وارون نمایی

فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. تبدیل فوریه نمایی f یک تناظری است که مقدار حقیقی ω را دریافت نموده و خروجی آن توسط رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

بطور مشابه برای تابع $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تبدیل نمایی وارون فوریه g تناظری است که مقدار حقیقی x را دریافت نموده و خروجی آن توسط رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\mathcal{F}^{-1}\{g\}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

همانطور که از نحوه نام گذاری مشخص است برای تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ رابطه زیر برقرار است:

$$f = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f\}\}$$

علاوه بر خاصیت خطی بودن تبدیل فوریه نمایی ارتباط تبدیل فوریه مشتق توابع با تبدیل فوریه تابع اصلی نیز در روابط زیر اشاره شده است:

$$\mathcal{F}\{f'\} = i\omega\mathcal{F}\{f\}$$

$$\mathcal{F}\{f''\} = -\omega^2\mathcal{F}\{f\}$$

تبدیل فوریه کسینوسی و تبدیل فوریه وارون کسینوسی

فرض کنید $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. تبدیل فوریه کسینوسی f یک تناظری است که مقدار حقیقی ω را دریافت نموده و خروجی آن توسط رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\mathcal{F}_c\{f\}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x dx$$

بطور مشابه برای تابع $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ تبدیل فوریه وارون کسینوسی g تناظری است که مقدار حقیقی x را دریافت نموده و خروجی آن توسط رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\mathcal{F}_c^{-1}\{g\}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(\omega) \cos \omega x d\omega$$

تبدیل فوریه سینوسی و تبدیل فوریه وارون سینوسی

فرض کنید $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. تبدیل فوریه سینوسی f یک تناظری است که مقدار حقیقی ω را دریافت نموده و خروجی آن توسط رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\mathcal{F}_s\{f\}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin \omega x dx$$

بطور مشابه برای تابع $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ تبدیل فوریه وارون سینوسی g تناظری است که مقدار حقیقی x را دریافت نموده و خروجی آن توسط رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\mathcal{F}_s^{-1}\{g\}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(\omega) \sin \omega x d\omega$$

علاوه بر خواص خطی بودن تبدیلات فوریه کسینوسی و سینوسی تبدیلات فوریه کسینوسی و سینوسی مشتق توابع توسط روابط زیر با یکدیگر در ارتباط هستند:

$$\mathcal{F}_c\{f'\} = \omega \mathcal{F}_s\{f\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0)$$

$$\mathcal{F}_s\{f'\} = -\omega \mathcal{F}_c\{f\}$$

$$\mathcal{F}_c\{f''\} = -\omega^2 \mathcal{F}_c\{f\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0)$$

$$\mathcal{F}_s\{f''\} = -\omega^2 \mathcal{F}_s\{f\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega f(0)$$

اکنون به بررسی تعدادی مسئله در ارتباط با تبدیلات فوریه می‌پردازیم.

سوال ۱ تابع f روی $(0,\infty)$ با ضابطه زیر تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x\leq 1 \\ 2-x & 1\leq x<2 \\ 0 & x\geq 2 \end{cases}$$

تبدیل فوریه کسینوسی f را محاسبه کنید.

سوال ۲ فرض کنید $a>0$ عددی ثابت است. تابع f روی $\mathbb{R}$ با ضابطه زیر تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases} a-|x| & |x|\leq a \\ 0 & |x|\geq a \end{cases}$$

تبدیل فوریه نمایی f را محاسبه کنید.

سوال ۳ تابع f روی $\mathbb{R}$ با ضابطه زیر تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & |x|\leq 1 \\ 0 & |x|\geq 1 \end{cases}$$

تبدیل فوریه نمایی f را محاسبه کنید.

سوال ۴ فرض کنید $a<0$ یک عدد ثابت باشد و تابع f را روی $\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=e^{ax^2}$ در نظر بگیرید. تبدیل فوریه نمایی f را محاسبه کنید.

سوال ۵ فرض کنید $a<0$ عددی ثابت باشد و فرض کنید تابع f روی $\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=e^{a|x|}$ تعریف شده باشد. تبدیل فوریه نمایی f را محاسبه کنید.

سوال ۶ فرض کنید $a<0$ عددی حقیقی و ثابت باشد. ابتدا تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x)=e^{ax}$ که روی $(0,\infty)$ تعریف شده را بدست آورده و سپس با استفاده از آن تبدیل فوریه سینوسی تابع $g(x)=\dfrac{e^{ax}}{x}$ که روی $(0,\infty)$ تعریف شده است را بدست آورید.

راهنمایی: برای بدست آوردن تبدیل فوریه تابع g تعریف کنید:

$$k(\omega)=\int_0^\infty \frac{e^{ax}\sin\omega x}{x}dx$$

حال مشتق k را محاسبه کنید. توجه داشته باشید که برای مشتق گیری از k می توانید از تابع انتگرالده نسبت به ω مشتق بگیرید.

سوال ۷ با استفاده از مفهوم تبدیل فوریه وارون کسینوسی تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ که روی بازه $(0, \infty)$ تعریف شده است را بیابید.

راهنمایی: تبدیل فوریه کسینوسی تابع $g(x) = e^{-x}$ را روی $(0, \infty)$ در نظر بگیرید.

سوال ۸ فرض کنید $a < 0$ عددی ثابت باشد. تبدیل فوریه نمایی تابع $f(x) = xe^{ax^2}$ که روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است را بیابید.

راهنمایی: مشتق تابع e^{ax^2} نسبت به x برابر است با $2axe^{ax^2}$

سوال ۹ برای عدد حقیقی t_0 تابع پله‌ای u_{t_0} با ضابطه زیر تعریف می شود:

$$u_{t_0}(x) = \begin{cases} 0 & x < t_0 \\ 1 & x \geq t_0 \end{cases}$$

فرض کنید f تابعی باشد که روی $\mathbb{R}$ تعریف شده و تابع g را روی $\mathbb{R}$ با ضابطه $g(x) = f(x)u_{t_0}(x)$ تعریف کنید. تبدیل فوریه نمایی g را بر حسب تبدیل فوریه نمایی f محاسبه کنید.

سوال ۱۰ فرض کنید f تابعی باشد که روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است و a ثابتی حقیقی و ناصفر باشد و توابع g, h را روی $\mathbb{R}$ با ضابطه های $g(x) = f(x-a)$ و $h(x) = f(ax)$ تعریف شده باشند. تبدیلات فوریه نمایی توابع g, h را برحسب تبدیل فوریه نمایی f بیابید.

سوال ۱۱ فرض کنید f تابعی باشد که روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است و a ثابتی حقیقی و ناصفر باشد و توابع g, h را روی $\mathbb{R}$ با ضابطه های $g(x) = f(x)\cos ax$ و $h(x) = f(x)\sin ax$ تعریف شده باشند. تبدیلات فوریه نمایی توابع g, h را برحسب تبدیل فوریه نمایی f بیابید

سوال ۱۲ تابع f را چنان تعیین کنید که تبدیل فوریه کسینوسی آن برابر با تابع زیر باشد:

$$g(\lambda) = \begin{cases} a - \frac{\lambda}{2} & 0 < \lambda < 2a \\ 0 & \lambda \geq 2a \end{cases}$$

که در آن $a > 0$ عددی حقیقی است.