تمرینات سری دوم

درس ریاضی مهندسی

زمستان ۹۹

به نام پروردگار یکتا

سری‌های فوریه سینوسی و کسینوسی

فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع دلخواه باشد. تابع f را **زوج** می‌نامیم هرگاه برای تمامی مقادیر حقیقی x داشته باشیم $f(-x) = f(x)$ و تابع f را **فرد** می‌نامیم هرگاه برای تمامی مقادیر حقیقی x داشته باشیم $f(-x) = -f(x)$.

یادآوری مطالب زیر می تواند مفید واقع شود:

۱. حاصلضرب دو تابع زوج تابعی زوج است.

۲. حاصلضرب دوتابع فرد تابعی زوج است.

۳. حاصلضرب یک تابع زوج و یک تابع فرد در یکدیگر تابعی فرد می‌باشد.

همچنین یادآوری می‌کنیم که اگر $\alpha \neq 0$ عددی حقیقی باشد آنگاه تابع $f(x) = \cos \alpha x$ تابعی زوج و تابع $g(x) = \sin \alpha x$ تابعی فرد می‌باشند.

در ارتباط با خاصیت انتگرال‌گیری از توابع زوج و فرد نیز یادآوری نکات زیر می‌تواند مفید واقع شود:

۱. اگر l عددی مثبت و f تابعی زوج باشد آنگاه:

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx$$

۲. اگر l عددی مثبت و g تابعی فرد باشد آنگاه:

$$\int_{-l}^{l} g(x)dx = 0$$

حال فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی زوج و متناوب با دوره تناوب $p = 2l$ باشد. پس می توان به f یک سری فوریه نسبت داد:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

با توجه به زوج بودن تابع f ضرایب فوریه تابع f را محاسبه می‌کنیم:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{۱}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{۲}{l}\int_{۰}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$b_n = \frac{۱}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = ۰$$

پس تابع زوج و متناوب $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با دوره تناوب $p=۲l$ سری فوریه‌ای به شکل:

$$f(x) \approx \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \qquad (۱)$$

دارد که در آن:

$$a_۰ = \frac{۲}{l}\int_{۰}^{l} f(x)dx \qquad (۲)$$

$$a_n = \frac{۲}{l}\int_{۰}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (۳)$$

با محاسبات مشابه نتیجه می شود که تابع فرد و متناوب $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با دوره تناوب $p=۲l$ سری فوریه‌ای به شکل:

$$g(x) \approx \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (۴)$$

دارد که در آن:

$$b_n = \frac{۲}{l}\int_{۰}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (۵)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) و (۳) و (۴) و (۵) نتیجه می‌شود که هرگاه مقادیر یک تابع زوج (یا فرد) متناوب با دوره تناوب $p=۲l$ روی بازه‌ای به طول l داده شده باشد آنگاه می‌توان سری فوریه نظیر به آن را محاسبه نمود.

اصطلاحا به نمایش (۱) **سری فوریه کسینوسی** و به نمایش (۴) **سری فوریه سینوسی** می گویند. به بیانی ساده‌تر می‌توان این چنین تعبیر نمود که توابع متناوب و زوج سری فوریه کسینوسی و توابع متناوب و فرد سری فوریه سینوسی دارند.

اکنون به بررسی تعدادی سوال می پردازیم.

$\boxed{\textbf{سوال ۱}}$ فرض کنید تابع f روی بازه $[۰,۲]$ با ضابطه زیر تعریف شده باشد:

$$f(x) = \begin{cases} ۲x & ۰ \le x \le ۱ \\ ۲ & ۱ \le x < \frac{۳}{۲} \\ -۲x+۴ & \frac{۳}{۲} \le x \le ۲ \end{cases}$$

نمودار تابع f را روی بازه $[0,2]$ رسم کنید. سپس با استفاده از رسم نمودار یکبار این تابع را به یک تابع زوج با دوره تناوب $p = 2l = 4$ و بار دیگر به یک تابع فرد با دوره تناوب $p = 2l = 4$ گسترش دهید. در هریک از حالات بیان شده سری فوریه تابع گسترش یافته را محاسبه کنید.

سوال ۲ فرض کنید f تابعی متناوب با دوره تناوب $p = 2l = 2$ باشد که روی بازه $[-1,1]$ با ضابطه $f(x) = 1 - |x|$ تعریف شده است. نمودار f را رسم کنید و در زوج بودن یا فرد بودن f بحث کنید. سری فوریه متناظر با تابع f را بدست آورید.

سوال ۳ فرض کنید تابع f روی بازه $[0,1]$ با ضابطه $f(x) = xe^x$ تعریف شده باشد. با استفاده از رسم یک نمودار تقریبی تابع f را به یک تابع زوج و متناوب با دوره تناوب $p = 2l = 2$ گسترش داده و سری فوریه متناظر با تابع گسترش یافته (که در واقع باید یک سری کسینوسی باشد) را محاسبه کنید.

پیشنهاد: در محاسبه سری فوریه تابع فوق به انتگرالی به فرم زیر می رسیم:

$$\mathrm{I} = \int_u^v xe^{\alpha x} \cos \beta x dx$$

که یافتن انتگرال فوق ممکن است با استفاده از روش های معمول انتگرال گیری (مانند روش جز به جز) کار مشکلی باشد. ولی با یادآوری تابع $\mathrm{C}(\alpha, \beta; u, v)$ که در سری اول تمرینات تعریف شده است:

$$\mathrm{C}(\alpha, \beta; u, v) := \int_u^v e^{\alpha x} \cos \beta x dx$$

و با توجه به اینکه طبق روش های بیان شده در سری اول تمرینات می توانیم بطور صریح فرمولی برای C برحسب متغیرهای α, β, u, v بدست آوریم در نهایت خواهیم داشت:

$$\mathrm{I} = \frac{\partial \mathrm{C}(\alpha, \beta; u, v)}{\partial \alpha}$$

سوال ۴ فرض کنید تابع f روی بازه $[0,2]$ با ضابطه $f(x) = x^2 e^x$ تعریف شده باشد. با استفاده از رسیم یک نمودار تقریبی تابع f را به یک تابع فرد و متناوب با دوره تناوب $p = 2l = 4$ گسترش داده و سری فوریه متناظر با تابع گسترش یافته (که در واقع باید یک سری سینوسی باشد) را محاسبه کنید.

پیشنهاد: در محاسبه سری فوریه تابع فوق به انتگرالی به فرم زیر می رسیم:

$$\mathrm{J} = \int_u^v x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x dx$$

که یافتن انتگرال فوق ممکن است با استفاده از روش های معمول انتگرال گیری (مانند روش جز به جز) کار مشکلی باشد. ولی با یادآوری تابع $\mathrm{S}(\alpha, \beta; u, v)$ که در سری اول تمرینات تعریف شده است:

$$\mathrm{S}(\alpha, \beta; u, v) := \int_u^v e^{\alpha x} \sin \beta x dx$$

و با توجه به اینکه طبق روش های بیان شده در سری اول تمرینات می توانیم بطور صریح فرمولی برای S برحسب متغیرهای α, β, u, v بدست آوریم در نهایت خواهیم داشت:

$$\mathrm{J} = \frac{\partial^2 \mathrm{S}(\alpha, \beta; u, v)}{\partial \alpha^2}$$

سوال ۵ فرض کنید $0 < a < p$ و فرض کنید $h > 0$. تابع f را روی بازه $[0, p]$ با ضابطه زیر تعریف کنید:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{h}{a} x & 0 \le x \le a \\[2mm] \dfrac{h}{a-p}(x-p) & a \le x \le p \end{cases}$$

نمودار تابع f را روی بازه $[0, p]$ رسم کرده و سپس به کمک رسم نمودار آن را به تابعی فرد و متناوب با دوره تناوب $2p$ گسترش دهید. سری فوریه (سینوسی) تابع گسترش یافته را بدست آورید.

سوال ۶ فرض کنید a عددی صحیح باشد و تابع f روی بازه $[0, \pi]$ با ضابطه $f(x) = \sin ax$ تعریف شده باشد. سری فوریه کسینوسی تابع f را بیابید.

سوال ۷ فرض کنید f تابعی زوج و متناوب با دوره تناوب 2π باشد که در رابطه $f(x+\pi) = -f(x)$ برای هر مقدار حقیقی x صدق می کند. از آنجایی که f تابعی زوج فرض شده است پس یک سری فوریه کسینوسی دارد. اگر a_n ها ضرایب فوریه کسینوسی f باشند نشان دهید:

$$a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = \cdots = 0$$

سوال ۸ فرض کنید f تابعی فرد و متناوب با دوره تناوب 2π باشد که در رابطه $f(x+\pi) = -f(x)$ برای هر مقدار حقیقی x صدق می کند. از آنجایی که f تابعی فرد فرض شده است پس یک سری فوریه سینوسی دارد. اگر b_n ها ضرایب فوریه سینوسی f باشند نشان دهید:

$$b_2 = b_4 = b_6 = b_8 = \cdots = 0$$