به نام پروردگار یکتا

تمرینات سری سیزدهم

درس ریاضی مهندسی

بهار ۱۴۰۰

بسط تیلور و لوران

سوال ۱ بسط تیلور هرکدام از توابع زیر را حول نقطه داده شده بدست آورید.

(آ) تابع $f(z) = ze^z$ حول نقطه $z_0 = 1$

(ب) تابع $f(z) = \cos^2 z$ حول نقطه $z_0 = 0$

(ج) تابع $f(z) = \frac{2z}{(z+i)^3}$ حول نقطه $z_0 = 0$

(د) تابع $f(z) = \frac{4}{z^2+2z}$ حول نقطه $z_0 = 1$

سوال ۲ نشان دهید بسط مک لورن تابع $f(z) = \mathrm{Log}(\frac{1+z}{1-z})$ بصورت زیر می باشد:

$$\mathrm{Log}(\frac{1+z}{1-z}) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

نشان دهید این بسط روی دیسک به مرکز مبدا و شعاع ۱ ($|z| < 1$) اعتبار دارد و این بزرگترین دیسک به مرکز مبدا است که بسط فوق روی آن معتبر است.

سوال ۳ نشان دهید بسط تیلور تابع $f(z) = \mathrm{Log}z$ حول نقطه $z_0 = -1+i$ عبارت است از:

$$g(z) = \mathrm{Log}(-1+i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(z+1-i)^n}{n(-1+i)^n}$$

نشان دهید شعاع همگرایی سری فوق برابر است به $R = \sqrt{2}$ و بنابراین g روی دیسک $|z+1-i| < \sqrt{2}$ تحلیلی است. اتفاقی که در این پدیده رخ می دهد آن است که دیسک مذکور قسمتی از بخش منفی محور x ها را درون خود دارا است و می دانیم که قسمت منفی محور x ها شاخه برشی برای شاخه اصلی لگاریتم است و بنابراین $\mathrm{Log}z$ روی قسمت هایی از دیسک مذکور تعریف نشده است هر چند اطمینان داریم که روی دیسک هایی که مرکز $z_0 = -1+i$ که قسمت منفی محور x ها را قطع نمی کنند مقادیر $\mathrm{Log}z$ و $g(z)$ با هم برابر هستند. این موارد بیشتر در مباحثی تحت عنوان **ادامه تحلیلی توابع** مورد بحث قرار می گیرند. در مثال بالا اصطلاحا می گوییم g **یک ادامه تحلیلی تابع** $\mathrm{Log}z$ **است.**

سوال ۴ بسط لوران هرکدام از توابع زیر را در ناحیه مشخص شده و نسبت به نقطه داده شده محاسبه کنید.

(آ) تابع $f(z)=\dfrac{1}{1+z}$ نسبت به نقطه $z_0=0$ و در ناحیه $\left|z\right|>1$

(ب) تابع $f(z)=\dfrac{1}{3+2iz}$ نسبت به نقطه $z_0=-i$ و در ناحیه $\left|z+i\right|>\dfrac{5}{2}$

(ج) تابع $f(z)=z^{22}e^{\frac{1}{z^2}}$ نسبت به نقطه $z_0=0$ و ناحیه $\left|z\right|>0$

(د) تابع $f(z)=\dfrac{z}{(z+2)(z+3)}$ نسبت به نقطه $z_0=0$ و در ناحیه $2<\left|z\right|<3$

(ه) تابع $f(z)=\dfrac{4z-5}{(z-2)(z-1)}$ نسبت به نقطه $z_0=2$ و در ناحیه $\left|z-2\right|>1$

سوال ۵ با استفاده از این نکته که می توان از بسط لوران توابع بصورت جمله به جمله انتگرال گیری نمود حاصل انتگرال های مختلط زیر را محاسبه کنید.

(آ)

$$\oint_{C_1(0)} \sin\frac{1}{z}dz$$

(ب)

$$\oint_{C_1(0)} \cos z\sin\frac{1}{z}dz$$

(ج)

$$\oint_{C_2(0)} \mathrm{Log}(1+\frac{1}{z})dz$$

(د)

$$\oint_{C_1(0)} \frac{1}{z}\cos\frac{1}{z^2}dz$$

منظور از $C_r(0)$ دایره به مرکز مبدا و شعاع r است که بصورت مثلثاتی جهت دهی شده است.

حساب مانده ها

یادآوری می کنیم که هرگاه C یک خم ساده و بسته در جهت مثلثاتی باشد و تابع f درون C به جز احتمالا در تعدادی متناهی نقطه تکینگی مانند $z_1, \ldots, z_k$ که درون خم C قرار دارند تحلیلی باشد آنگاه داریم:

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^{k}Res(f;z_j)$$

سوال ۶ در هرکدام از توابع زیر ابتدا نقاط تکینگی آنها را پیدا نموده و نوع آنها را نیز مشخص کنید (نقطه تکینگی رفع شدنی- قطب یا نقطه تکینگی اساسی). در صورتی که قطب داشته باشیم مرتبه آن را نیز مشخص کنید.

(آ)

$$f(z) = \frac{z(z-۱)^۲}{\sin \pi z \sin z}$$

(ب)

$$f(z) = \frac{z}{e^z - ۱}$$

(ج)

$$f(z) = \frac{۱}{z} - \sin \frac{۱}{z}$$

(د)

$$f(z) = e^{\frac{۱}{۱-z}} + \frac{۱}{۱-z}$$

(ه)

$$f(z) = \frac{۱-z^۲}{\sin z} + \frac{z-۱}{z+۱}$$

سوال ۷ فرض کنید تابع f روی ناحیه $|z| > R$ تحلیلی است. قرار دهید $g(z) = f(\frac{۱}{z})$. می گوییم ∞ یک نقطه تکینگی f است هرگاه $z = ۰$ یک نقطه تکینگی g باشد و نوع این تکینگی از g به ارث برده می شود. یعنی ∞ یک نقطه تکینگی رفع شدنی (قطب یا تکینگی اساسی) برای تابع f است هرگاه $z = ۰$ یک نقطه تکینگی رفع شدنی (قطب یا تکینگی اساسی) برای تابع g باشد.

در هرکدام از موارد زیر نوع تکینگی ∞ را مشخص کنید.

(آ)

$$f(z) = \frac{۱}{۱+z}$$

(ب)

$$f(z) = e^z - \cos \frac{۱}{z}$$

(ج)

$$f(z) = \frac{z}{z^۲+۱} - \frac{۱}{z}$$

سوال ۸ مانده هرکدام از توابع زیر را در نقاط تکینگی آنها محاسبه کنید.

(آ)

$$f(z) = \cos \frac{۱}{z} \sin \frac{۱}{z}$$

(ب)

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3}$$

(ج)

$$f(z) = e^{z + \frac{1}{z}}$$

(د)

$$f(z) = \frac{1 + z}{z^2 + 2z + 2}$$

(ه)

$$f(z) = \frac{\sin z^2}{z^2(z^2 + 1)}$$

یادآوری می کنیم که هرگاه $z = z_0$ یک قطب از مرتبه m برای تابع f باشد و قرار دهیم $h(z) = (z - z_0)^m f(z)$ آنگاه:

$$Res(f; z_0) = \frac{h^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

$\boxed{\textbf{سوال ۹}}$ حاصل هرکدام از انتگرال های زیر را با استفاده از حساب مانده ها محاسبه کنید.

(آ)

$$\oint_{C_{0.001}(1)} \frac{1}{z^5 - 1} dz$$

(ب)

$$\oint_{C_1(0)} e^{\frac{1}{z}} \cos \frac{1}{z^2} dz$$

(ج)

$$\oint_{C_{0.5}(0)} \frac{1}{z^2(e^z - 1)} dz$$

(د)

$$\oint_{C_4(0)} z \tan z dz$$

$\boxed{\textbf{سوال ۱۰}}$ برای تابع $f(z)$ داده شده قرار دهید $g(z) = \frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$ و **مانده تابع f در ∞** را با دستور زیر تعریف می کنیم:

$$Res(f; \infty) := Res(g; 0)$$

با استفاده از تعریف مانده در ∞ می توان فرمول انتگرال مانده ای را بدین صورت نیز فرمول بندی نمود: فرض کنید C یک خم ساده و بسته در جهت مثلثاتی باشد و تابع f درون C به جز احتمالا تعدادی متناهی نقطه $z_۱, \dots, z_k$ که درون C قرار دارند تحلیلی باشد. در اینصورت:

$$\oint_C f(z)dz = ۲\pi i \sum_{j=۱}^{k} Res(f; z_j) = ۲\pi i Res(f; \infty)$$

فرض کنید C دایره به مرکز مبدا و شعاع ۳ در جهت مثلثاتی باشد. با استفاده از مفهوم مانده توابع در ∞ حاصل هرکدام از انتگرال های زیر را بدست آورید:

(آ)

$$\oint_C \frac{۵z - ۲}{z(z - ۱)} dz$$

(ب)

$$\oint_C z^۲ e^{\frac{۱}{z}} dz$$

(ج)

$$\oint_C \frac{z^۵}{۱ - z^۳} dz$$

کاربرد حساب مانده ها در محاسبه انتگرال های مثلثاتی و انتگرال های ناسره

سوال ۱۱ این تمرین حالت اختیاری دارد. حاصل هرکدام از انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

(آ)

$$\int_۰^{۲\pi} \frac{d\theta}{۷ - ۲\cos^۲\theta - ۳\sin^۲\theta}$$

(ب)

$$\int_۰^{۲\pi} \frac{d\theta}{\sin^۲\theta + ۲\cos^۲\theta}$$

(ج)

$$\int_۰^{\pi} \frac{\cos\theta \sin^۲\theta}{۲ + \cos\theta} d\theta$$

(د)

$$\int_۰^{۲\pi} \frac{d\theta}{۷ + ۲\cos\theta + ۳\sin\theta}$$

(ه)

$$\int_{۰}^{\pi} \frac{d\theta}{۹+۱۶\sin^{۲}\theta}$$

یادآوری می کنیم که $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{۲}$ و $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{۲i}$

سوال ۱۲ یادآوری می کنیم که مقدار اصلی کشی انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$P.V\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)dx$$

همچنین گزاره زیر را نیز یادآوری می کنیم: فرض کنید $p(x), q(x)$ دو چند جمله ای از متغیر حقیقی x باشند و فرض کنید درجه $q(x)$ حداقل دو واحد از درجه چند جمله ای $p(x)$ بیشتر باشد. فرض کنید $q(x)$ هیچ ریشه حقیقی نداشته باشد (این فرض برای آن گذاشته می شود که $\frac{p(x)}{q(x)}$ عبارتی تعریف شده روی کل خط حقیقی باشد). فرض کنید $z_{۱}, z_{۲}, \dots, z_k$ تمامی قطب های تابع $\frac{p(z)}{q(z)}$ روی نیم صفحه بالایی باشد. در اینصورت:

$$P.V\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}dx = ۲\pi i\sum_{j=۱}^{k} Res(\frac{p}{q}; z_j)$$

با استفاده از گزاره فوق حاصل هرکدام از عبارات زیر را بدست آورید.

(آ)

$$P.V\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{۱+x^{۴}}dx$$

(ب)

$$P.V\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{۱+x^{۲}+x^{۴}}dx$$

(ج)

$$P.V\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{(۱+x^{۲})^{n+۱}}dx$$

(د)

$$P.V\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{(۱+x^{۴})^{۲}}dx$$

سوال ۱۳ این تمرین حالت اختیاری دارد. فرض کنید p, q دو چند جمله ای باشند که درجه q حداقل ۲ واحد از درجه p بیشتر است. فرض کنید $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ هیچ قطبی روی مجموعه اعداد صحیح نداشته باشد. فرض کنید $z_{۱}, \dots, z_n$ تمامی قطب های $f(z)$ روی صفحه مختلط باشند. در اینصورت:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{p(m)}{q(m)} = -\pi\sum_{j=۱}^{n} Res(\frac{p(z)}{q(z)}\cot\pi z; z_j)$$

با استفاده از نتیجه بالا نشان دهید اگر $a > 0$ آنگاه:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^4 + 4a^4} = \frac{\pi}{4a^3} \frac{\sinh(2a\pi) + \sin(2a\pi)}{\cosh(2a\pi) - \cos(2a\pi)}$$

و سپس رابطه صریحی برای $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4 + 4a^4}$ بیابید.

همچنین نشان دهید:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+1)^2} = \frac{\pi}{4\sinh^2 \pi}(\sinh(2\pi) - 2\pi)$$