به نام پروردگار یکتا

تمرینات سری اول

درس ریاضی مهندسی

زمستان ۹۹

سری فوریه توابع متناوب از دوره تناوب 2π

یادآوری می‌کنیم که برای تابع متناوب $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ که از دوره تناوب 2π است (یعنی برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $f(x+2\pi) = f(x)$) یک سری فوریه به تابع f نسبت داده می‌شود:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

که در آن عدد a_0 و دنباله های a_n, b_n از طریق روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \tag{1}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \tag{3}$$

اصطلاحا به اعداد a_n ضرایب فوریه کسینوسی و به اعداد b_n ضرایب فوریه سینوسی گفته می‌شود. عدد $\frac{a_0}{2}$ نیز ضریب ثابت سری فوریه ذکر شده است.

در مورد انتگرال گیری از توابع متناوب نیز به این نکته دقت کنید که اگر تابع g متناوب و با دوره تناوب p باشد (یعنی برای هر عدد x رابطه $g(x+p) = g(x)$ برقرار باشد) آنگاه انتگرال گیری در بازه‌ای به طول p به نقطه شروع بازه بستگی ندارد. به عبارت دقیق تر اگر g تابعی از دوره تناوب p باشد و $r, s \in \mathbb{R}$ دلخواه باشند آنگاه رابطه زیر همواره برقرار است:

$$\int_{r}^{r+p} g(x)dx = \int_{s}^{s+p} g(x)dx$$

از روابط انتگرالی (۱) و (۲) و (۳) و نکته‌ای که اخیرا ذکر شد نتیجه می‌شود که اگر h یک تابع متناوب با دوره تناوب 2π باشد که مقادیر آن را در بازه‌ای دلخواه به طول 2π بدانیم آنگاه می توانیم سری فوریه تابع h را بدست آوریم.

اکنون به بررسی سوالاتی در این بخش می‌پردازیم.

$\boxed{\textbf{سوال ۱}}$ فرض کنید f تابعی متناوب با دوره تناوب 2π باشد که روی بازه $[-\pi,\pi)$ با ضابطه زیر تعریف شده باشد:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & -\pi\le x<0 \\ \\ 0 & 0\le x<\pi \end{cases}$$

سری فوریه تابع f را بیابید.

$\boxed{\textbf{سوال ۲}}$ (آ) فرض کنید f تابعی متناوب با دوره تناوب 2π باشد که روی بازه $[0,2\pi)$ با ضابطه $f(x)=x$ تعریف شده است.

سری فوریه تابع f را بیابید.

(ب) فرض کنید g تابعی متناوب با دوره تناوب 2π باشد که روی بازه $[-\pi,\pi)$ با ضابطه $g(x)=x$ تعریف شده است.

سری فوریه تابع g را بیابید.

$\boxed{\textbf{سوال ۳}}$ فرض کنید f تابعی متناوب با دوره تناوب 2π باشد که روی بازه $[-\pi,\pi)$ با ضابطه

$$f(x)=x|x|=\begin{cases} -x^2 & -\pi\le x<0 \\ \\ x^2 & 0\le x<\pi \end{cases}$$

تعریف شده است. سری فوریه تابع f را بیابید.

$\boxed{\textbf{سوال ۴}}$ فرض کنید f تابعی متناوب با دوره تناوب 2π باشد که روی بازه $[0,2\pi)$ با ضابطه:

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & 0\le x<\pi \\ \\ x^2+2x & \pi\le x<2\pi \end{cases}$$

تعریف شده است. سری فوریه تابع f را بیابید.

$\boxed{\textbf{سوال ۵}}$ فرض کنید f تابعی متناوب با دوره تناوب 2π باشد که روی بازه $[-\pi,\pi]$ با ضابطه $f(x)=(\pi-|x|)^2$ تعریف شده است. سری فرویه تابع f را بیابید.

برای حل سوالات ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ لازم است انتگرال هایی که در آنها تابع انتگرالده بصورت حاصلضربی از یک تابع چند جمله ای و یک تابع مثلثاتی (سینوسی یا کسینوسی) می باشند مورد بررسی قرار گیرند. پس فرض کنید $m=0,1,2,\dots$ و u,v اعدادی حقیقی باشند که $u\le v$. همچنین فرض کنید $\lambda\neq 0$ عددی حقیقی باشد. تعریف کنید:

$$\mathrm{I}_\lambda(m;u,v):=\int_u^v x^m\cos\lambda x\,dx$$

$$\mathrm{J}_\lambda(m;u,v) := \int_u^v x^m \sin\lambda x dx$$

برای انتگرال I_λ با استفاده از انتگرال گیری جز به جز قرار دهید $\mathrm{U} = x^m$ و $d\mathrm{V} = \cos\lambda x dx$. پس $d\mathrm{U} = m x^{m-1} dx$ و $\mathrm{V} = \frac{1}{\lambda}\sin\lambda x$. در نتیجه:

$$\mathrm{I}_\lambda(m;u,v) = \frac{v^m}{\lambda}\sin\lambda v - \frac{u^m}{\lambda}\sin\lambda u - \frac{m}{\lambda}\mathrm{J}_\lambda(m-1;u,v)$$

و بطور مشابه برای J_λ نیز بدست خواهیم آورد:

$$\mathrm{J}_\lambda(m;u,v) = \frac{u^m}{\lambda}\cos\lambda u - \frac{v^m}{\lambda}\cos\lambda v + \frac{m}{\lambda}\mathrm{I}_\lambda(m-1;u,v)$$

و با بکارگیری روابط بازگشتی فوق می توان I_λ و J_λ را محاسبه نمود. همچنین توجه داشته باشید که:

$$\mathrm{I}_\lambda(0;u,v) = \frac{1}{\lambda}[\sin\lambda v - \sin\lambda u]$$

$$\mathrm{J}_\lambda(0;u,v) = \frac{1}{\lambda}[\cos\lambda u - \cos\lambda v]$$

سوال ۶ فرض کنید $\alpha \neq 0$ و f تابعی متناوب باشد که روی بازه $[0, 2\pi)$ با ضابطه $f(x) = e^{\alpha x}$ تعریف شده است. سری فوریه تابع f را بیابید.

برای حل سوال ۶ لازم است به ازای ثابت های ناصفر β, λ و اعداد حقیقی u, v که $u \leq v$ انتگرال های زیر بررسی شوند:

$$\mathrm{C}(\beta,\lambda;u,v) = \int_u^v e^{\beta x}\cos\lambda x dx$$

$$\mathrm{S}(\beta,\lambda;u,v) = \int_u^v e^{\beta x}\sin\lambda x dx$$

برای بررسی C قرار دهید $\mathrm{U} = e^{\beta x}$ و $d\mathrm{V} = \cos\lambda x dx$. پس $d\mathrm{U} = \beta e^{\beta x} dx$ و $\mathrm{V} = \frac{1}{\lambda}\sin\lambda x$. پس:

$$\mathrm{C}(\beta,\lambda;u,v) = \frac{e^{\beta v}}{\lambda}\sin\lambda v - \frac{e^{\beta u}}{\lambda}\sin\lambda u - \frac{\beta}{\lambda}\mathrm{S}(\beta,\lambda;u,v)$$

بطور مشابه برای S نیز رابطه زیر حاصل می شود:

$$\mathrm{S}(\beta,\lambda;u,v) = \frac{e^{\beta u}}{\lambda}\cos\lambda u - \frac{e^{\beta v}}{\lambda}\cos\lambda v + \frac{\beta}{\lambda}\mathrm{C}(\beta,\lambda;u,v)$$

پس دستگاهی خطی با مجهولات C و S بدین شرح داریم:

$$\begin{cases} \mathrm{C}(\beta,\lambda;u,v) + \frac{\beta}{\lambda}\mathrm{S}(\beta,\lambda;u,v) = \frac{e^{\beta v}}{\lambda}\sin\lambda v - \frac{e^{\beta u}}{\lambda}\sin\lambda u \\ -\frac{\beta}{\lambda}\mathrm{C}(\beta,\lambda;u,v) + \mathrm{S}(\beta,\lambda;u,v) = \frac{e^{\beta u}}{\lambda}\cos\lambda u - \frac{e^{\beta v}}{\lambda}\cos\lambda v \end{cases}$$

با حل دستگاه خطی فوق (مثلا با استفاده از روش کرامر) در نهایت $\mathrm{C}(\beta,\lambda;u,v)$ و $\mathrm{S}(\beta,\lambda;u,v)$ حاصل می‌شوند.

سوال ۷ فرض کنید α عددی غیرصحیح باشد و فرض کنید f تابعی متناوب با دوره تناوب ۲π باشد که روی بازه $[-\pi, \pi)$ با ضابطه $f(x) = \cos \alpha x$ تعریف شده باشد. سری فوریه تابع f را بیابید.

سوال ۸ مجددا فرض کنید α عددی غیرصحیح باشد و فرض کنید g تابعی متناوب با دوره تناوب ۲π باشد که روی بازه $[۰, ۲\pi)$ با ضابطه $g(x) = \sin \alpha x$ تعریف شده باشد. سری فوریه تابع g را بیابید.

سوال ۹ فرض کنید h تابعی متناوب با دوره تناوب ۲π بوده که روی بازه $[-\pi, \pi)$ با ضابطه $h(x) = x \cos x$ تعریف شده است. سری فوریه تابع h را بیابید.

سوال ۱۰ فرض کنید h تابعی متناوب با دوره تناوب ۲π باشد که روی بازه $[۰, ۲\pi)$ با ضابطه $h(x) = x^۲ \sin ۳x$ تعریف شده باشد. سری فوریه تابع h را بیابید.

برای حل سوالات ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ روابط زیر می توانند مفید واقع شوند:

$$\sin u \cos v = \frac{۱}{۲}[\sin(u+v) + \sin(u-v)]$$

$$\sin u \sin v = \frac{۱}{۲}[\cos(u-v) - \cos(u+v)]$$

$$\cos u \cos v = \frac{۱}{۲}[\cos(u+v) + \cos(u-v)]$$

البته در سوالات ۹و ۱۰ روابط اخیر با روابط مربوط به I_λ و J_λ که در بخش‌های ابتدایی بیان شد ادغام می‌شوند.

سری فوریه توابع متناوب از دوره تناوب دلخواه

فرض کنید f تابعی متناوب با دوره تناوب دلخواه باشد (یعنی دوره تناوب لزوما برابر با ۲π نیست). فرض کنید دوره تناوب f برابر با $p = ۲l$ باشد. اصطلاحا به عدد l نیم دوره تابع f گفته می‌شود. در این صورت به تابع f یک سری فوریه بدین صورت نسبت داده می‌شود:

$$f(x) \approx \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

که در آن اعداد $a_۰$ و a_n و b_n از طریق روابط زیر قابل محاسبه هستند:

$$a_۰ = \frac{۱}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx \qquad (۴)$$

$$a_n = \frac{۱}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (۵)$$

$$b_n = \frac{۱}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (۶)$$

توجه کنید که در حالتی که تابع f از دوره تناوب ۲π باشد خواهیم داشت $l = \pi$ و بنابراین در این حالت همان سری فوریه معمولی برای توابع از دوره تناوب ۲π را خواهیم داشت. همچنین اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب $p = ۲l$ باشد و مقادیر تابع f روی بازه‌ای به طول p مشخص باشد آنگاه از روابط (۴) و (۵) و (۶) نتیجه می شود که می توانیم سری فوریه تابع f را محاسبه کنیم.

سوال ۱۱ فرض کنید f تابعی متناوب با دوره تناوب $p = ۲l = ۱$ باشد که روی بازه $[-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$ با ضابطه زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} ۱ - x & -\frac{۱}{۲} \leq x < ۰ \\ ۱ & ۰ \leq x < \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

سری فوریه تابع f را بیابید.

سوال ۱۲ فرض کنید f تابعی متناوب با دوره تناوب $p = ۲l = \pi$ باشد که روی بازه $[۰, \pi)$ با ضابطه $f(x) = \cos x$ تعریف شده است. سری فوریه تابع f را بیابید.

سوال ۱۳ فرض کنید f تابعی متناوب با دوره تناوب $p = ۲l = \pi$ باشد که روی بازه $[۰, \pi)$ با ضابطه $f(x) = \sin x$ تعریف شده است. سری فوریه تابع f را بیابید.

سوال ۱۴ فرض کنید f تابعی متناوب با دوره تناوب $p = ۲l = ۲$ باشد که روی بازه $[۱, ۳)$ با ضابطه زیر تعریف شده باشد:

$$f(x) = \begin{cases} ۲ - x & ۱ \leq x < ۲ \\ \sin \pi x & ۲ \leq x < ۳ \end{cases}$$

سری فوریه تابع f را بیابید.

سوال ۱۵ فرض کنید $۰ < h < l$ عددی دلخواه باشد.سری فوریه تابع متناوب f با دوره تناوب $p = ۲l$ که روی بازه $[-l, l]$ با ضابطه زیر تعریف شده است را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & -l \leq x \leq -h \\ \frac{۲}{h}x + ۲ & -h \leq x \leq ۰ \\ -\frac{۲}{h}x + ۲ & ۰ \leq x \leq h \\ ۰ & h \leq x \leq l \end{cases}$$