به‌نام خدا

توضیحاتی در خصوص اشتباهات رایج در سوال ۱

اشتباهات دانشجویان بیشتر متوجه موارد زیر بوده است.

- در قسمت ب) و در فرمول خطا، یعنی $E = \frac{f''(c)}{۲}x^۲$، برای یک c مناسب بین ۰ تا x، دانشجویان c را صفر یا x قرار می‌دهند و کران بالای مربوط به f'' را محاسبه نمی‌کنند.
- در قسمت ج) و برای اثبات $f\left(-\frac{۱}{۸}\right) > ۰$، دانشجویان از نتیجه حاصل از محاسبهٔ خطا، یعنی نامساوی $\left|f\left(-\frac{۱}{۸}\right) - L\left(-\frac{۱}{۸}\right)\right| < \frac{۱}{۳۲}$، استفاده نمی‌کنند و به‌طور مستقیم از ماشین حساب برای محاسبهٔ $L\left(-\frac{۱}{۸}\right)$ اقدام می‌کنند.
- اشتباه رایج دیگر استفاده از ماشین حساب برای نشان دادن $\cos ۱ < \frac{۳}{۴}$ است.
- در قسمت د) از نتیجه قسمت ج) استفاده نمی‌کنند و فقط $f(-۱) > ۰$ و $f(۰) = ۰$ را در نظر می‌گیرند و به خطا می‌روند ...

پاسخ سوال ۱ آزمون پایان‌ترم درس ریاضی عمومی یک

راه‌حل قسمت الف)

می‌دانیم تقریب خطی $f(x)$ حول نقطهٔ $x = a$، برابر است با

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

پس برای $f(x) = \sin x - x\cos(x + ۱)$، حول نقطهٔ $x = ۰$، تقریب خطی می‌شود

$$L(x) = f(۰) + f'(۰)x,$$

که با توجه به محاسبات زیر

$$\begin{aligned}
&f(۰) = \sin ۰ - ۰ \cdot \cos ۱ = ۰,\\
&f'(x) = \cos x - \cos(x + ۱) + x\sin(x + ۱),\\
&\Longrightarrow \quad f'(۰) = \cos ۰ - \cos ۱ + ۰ \cdot \sin ۱ = ۱ - \cos ۱,
\end{aligned}$$

داریم

$$L(x) = ۰ + (۱ - \cos ۱)x = (۱ - \cos ۱)x.$$

پس مقدار تقریبی $f\left(-\frac{۱}{۸}\right)$ می‌شود

$$f\left(-\frac{۱}{۸}\right) \approx L\left(-\frac{۱}{۸}\right) = \frac{\cos ۱ - ۱}{۸}.$$

$\boxed{\text{راه‌حل قسمت ب)}}$

اگر $L(x)$ تقریب خطی $f(x)$ حول صفر و $E = f(x) - L(x)$ خطای تقریب باشد، می‌دانیم

$$E = \frac{f''(c)}{۲}x^۲, \qquad \text{برای یک } c \text{ مناسب بین } ۰ \text{ تا } x$$

پس می‌توان تخمین زیر را داشت

$$|E| \leq \frac{M}{۲}x^۲,$$

که در آن M سوپریمم $|f''|$ روی بازهٔ $[۰, x]$، برای $x > ۰$، می‌باشد. (اگر $x < ۰$ باشد، سوپریمم روی بازهٔ $[x, ۰]$ خواهد بود.)

برای $f(x) = \sin x - x\cos(x+۱)$ داریم

$$f''(x) = -\sin x + ۲\sin(x+۱) + x\cos(x+۱).$$

پس برای خطای تقریب قسمت (الف) داریم

$$|E| \leq \frac{M}{۲}\left(\frac{۱}{۸}\right)^۲ = \frac{M}{۱۲۸},$$

که در آن M سوپریمم $|f''|$ روی بازهٔ $\left[۰, \frac{۱}{۸}\right]$ است.

از طرفی به‌کمک نامساوی مثلث و با توجه به‌این‌که $۰ \leq x \leq \frac{۱}{۸}$، داریم

$$\begin{aligned} \left|f''(x)\right| &= \left|-\sin x + ۲\sin(x+۱) + x\cos(x+۱)\right|, \\ &\leq |-\sin x| + \left|۲\sin(x+۱)\right| + \left|x\cos(x+۱)\right| \leq ۱ + ۲ + \frac{۱}{۸} = \frac{۲۵}{۸} < ۴. \end{aligned}$$

در نتیجه $M \leq \frac{۲۵}{۸} < ۴$، و

$$|E| \leq \frac{M}{۱۲۸} \leq \frac{\frac{۲۵}{۸}}{۱۲۸} < \frac{۴}{۱۲۸} = \frac{۱}{۳۲}.$$

$\boxed{\text{راه‌حل قسمت ج)}}$

طبق قسمت (الف) و (ب) می‌دانیم

$$\frac{\cos ۱ - ۱}{۸} - E \leq f\left(-\frac{۱}{۸}\right) \leq \frac{\cos ۱ - ۱}{۸} + E,$$

که در آن $|E| \leq \frac{۱}{۳۲}$ می‌باشد.

از طرفی چون تابع کسینوس روی $\left[۰, \frac{\pi}{۲}\right]$ نزولی است، می‌توان نوشت

$$۰ < \frac{\pi}{۴} < ۱ < \frac{\pi}{۲} \quad \Longrightarrow \quad ۰ < \cos ۱ < \cos \frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} < \frac{۳}{۴},$$

یا خلاصتا

$$\cos ۱ < \frac{۳}{۴}.$$

حال به‌کمک

$$f\left(-\frac{۱}{۸}\right) \leq \frac{\cos ۱ - ۱}{۸} + E,$$

و با توجه به تخمین اخیر برای $\cos ۱$، یعنی $\cos ۱ < \frac{۳}{۴}$، و این‌که $E \leq |E| \leq \frac{۱}{۳۲}$، داریم

$$f\left(-\frac{۱}{۸}\right) \leq \frac{\cos ۱ - ۱}{۸} + E < \frac{\frac{۳}{۴} - ۱}{۸} + \frac{۱}{۳۲} = -\frac{۱}{۳۲} + \frac{۱}{۳۲} = ۰,$$

یا

$$f\left(-\frac{۱}{۸}\right) < ۰.$$

$\boxed{\text{راه‌حل قسمت د)}}$

با توجه به قسمت (ج) می‌دانیم

$$f\left(-\frac{۱}{۸}\right) < ۰.$$

از طرفی

$$f(-۱) = \sin(-۱) - (-۱)\cos(-۱ + ۱) = -\sin ۱ + ۱ = ۱ - \sin ۱ > ۰.$$

حال چون $f\left(-\frac{۱}{۸}\right) < ۰$ و $f(-۱) > ۰$، و چون f تابعی پیوسته است، از قضیهٔ مقدار بینی وجود حداقل یک $c \in \left(-۱, -\frac{۱}{۸}\right) \subset (-۱, ۰)$ به‌طوری‌که $f(c) = ۰$ تضمین شده است.

$\boxed{\text{راه‌حل قسمت ه)}}$

روش اوّل:

با توجه به تخمین مربوط به $\cos 1$ در قسمت (ج)، یعنی $\cos 1 < \frac{3}{4}$، و محاسباتی ساده، داریم

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= x\sin(x+1) + \cos x - \cos(x+1),\\
f'(0) &= 0 + 1 - \cos 1 > 1 - \frac{3}{4} > \frac{1}{4} > 0,\\
f'(-1) &= -1\sin 0 + \cos(-1) - \cos 0 = \cos 1 - 1 < \frac{3}{4} - 1 < -\frac{1}{4} < 0.
\end{aligned}
$$

حال چون $f'(0) > 0$ و $f'(-1) < 0$، و چون f' تابعی پیوسته است، از قضیهٔ مقدار بینی وجود حداقل یک $d \in (-1,0)$ به‌طوری‌که $f'(d) = 0$ تضمین شده است.

روش دوم:

از قسمت (د) می‌دانیم $f(c) = 0$ برای یک $c \in (-1,0)$ برقرار است. از طرفی چون‌که $f(0) = 0$ می‌باشد، پس طبق قضیهٔ رول وجود حداقل یک $d \in (c,0) \subset (-1,0)$ به‌طوری‌که $f'(d) = 0$ تضمین شده است.

به‌نام خدا

توضیحاتی در خصوص اشتباهات رایج در سوال ۲

اشتباهات دانشجویان بیشتر متوجه موارد زیر بوده است.

- نسبت ارتفاع به قطر خواسته شده است و به تفاوت شعاع و قطر باید دقت شود.
- در این سوال، چون دو متغیر داریم، یعنی ارتفاع و قطر، پس نیاز داریم از هر دو رابطهٔ حجم و مساحت جانبی، استفاده کنیم.
- باید توجه داشت که مشتق حجم نسبت به قطر، به دلیل ثابت بودن آن، صفر است. همچنین مشتق مساحت را برابر صفر می‌گذاریم تا کاندید نقطهٔ مینیمم را بیابیم.

پاسخ سوال ۲ آزمون پایان‌ترم درس ریاضی عمومی یک

قرار می‌دهیم

$$\text{قطر قاعده} = D,$$
$$\text{ارتفاع استوانه} = h,$$
$$\text{حجم استوانه} = V = \pi h \frac{D^۲}{۴},$$
$$\text{مساحت کف استوانه} = \pi \frac{D^۲}{۴},$$
$$\text{مساحت جانبی استوانه} = \pi D h.$$

طبق مفروضات مسئله، برای حجم ثابت استوانه، یعنی

$$\text{حجم استوانه} = V = \pi h \frac{D^۲}{۴} = \text{ثابت},$$

می‌خواهیم مقدار

$$\text{مساحت کل بدنه‌ی استوانه} = S = \pi \frac{D^۲}{۴} + \pi D h,$$

را کمینه کنیم. قبل از بهینه‌سازی مساحت کل بدنه‌ی استوانه، توجه کنید که

$$V = \pi h \frac{D^۲}{۴} \implies h = \frac{۴V}{\pi D^۲} \implies \text{مساحت کل بدنه‌ی استوانه} = S = \pi \frac{D^۲}{۴} + \frac{۴V}{D}.$$

حال مساحت کل بدنه‌ی استوانه را به‌کمک مشتق گرفتن کمینه می‌کنیم؛ یعنی مشتق آن نسبت به متغیر قطر را برابر صفر قرار داده و قطر را می‌یابیم. این مقدار به‌دست آمده برای قطر، باعث کمینه شدن مساحت کل بدنه‌ی استوانه می‌شود.

$$S' = \frac{dS}{dD} = \pi\frac{D}{۲} - \frac{۴V}{D^۲} = ۰ \quad \Longrightarrow \quad D^۳ = \frac{۸V}{\pi}.$$

حال با توجه به رابطه‌های $h = \frac{۴V}{\pi D^۲}$ و رابطهٔ اخیر فوق، یعنی $D^۳ = \frac{۸V}{\pi}$، نسبت ارتفاع به قطر برابر می‌شود با

$$\frac{h}{D} = \frac{۴V}{\pi D^۳} = \frac{۴V}{\pi \cdot \frac{۸V}{\pi}} = \frac{۱}{۲}.$$

به‌نام خدا

توضیحاتی در خصوص اشتباهات رایج در سوال ۳

اشتباهات دانشجویان بیشتر متوجه موارد زیر بوده است.

- برای قسمت الف) بهترین راه یافتن مشتق، استفاده از قاعده زنجیره‌ای و قضیهٔ اساسی حسابان است تا بتوان ریشه‌های مشتق مرتبهٔ اوّل (یعنی نقاط بحرانی) را یافت و در قسمت ب) استفاده کرد.
- در قسمت ب) تنها برای محاسبات مربوط به تعیین مثبت یا منفی بودن مشتق دوم در نقاط بحرانی، مجاز به استفاده از ماشین حساب بودید و نه یافتن ریشه‌های مشتق!

پاسخ سوال ۳ آزمون پایان‌ترم درس ریاضی عمومی یک

راه‌حل قسمت الف) از قاعدهٔ زنجیره‌ای و قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌دانیم

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = b'(x)f\left(b(x)\right) - a'(x)f\left(a(x)\right).$$

پس محاسبه‌ای ساده برای $f(x) = \int_{x}^{۲x} e^{-t^۲}\,dt$، نتیجه می‌دهد

$$f'(x) = ۲e^{-۴x^۲} - e^{-x^۲},$$

و متعاقبا

$$f''(x) = -۱۶xe^{-۴x^۲} + ۲xe^{-x^۲}.$$

راه‌حل قسمت ب) برای یافتن ماکسیمم کافیست مشتق اوّل صفر و مشتق دوم منفی باشد. ابتدا نقاطی که در آن مشتق اوّل صفر است را می‌یابیم.

$$f'(x) = ۲e^{-۴x^۲} - e^{-x^۲} = ۰ \implies ۲e^{-۴x^۲} = e^{-x^۲}$$
$$\implies e^{۳x^۲} = ۲ \implies x = \pm\sqrt{\frac{\ln ۲}{۳}}.$$

حال چون

$$f''\left(+\sqrt{\frac{\ln ۲}{۳}}\right) = -۱۶\sqrt{\frac{\ln ۲}{۳}}۲^{\frac{-۴}{۳}} + ۲\sqrt{\frac{\ln ۲}{۳}}۲^{\frac{-۱}{۳}} < ۰,$$

و

$$f''\left(-\sqrt{\frac{\ln ۲}{۳}}\right) = +۱۶\sqrt{\frac{\ln ۲}{۳}}۲^{\frac{-۴}{۳}} - ۲\sqrt{\frac{\ln ۲}{۳}}۲^{\frac{-۱}{۳}} > ۰,$$

است، پس طبق آزمون مشتق مرتبهٔ دوم،

$$x = +\sqrt{\frac{\ln ۲}{۳}}$$

نقطهٔ ماکسیمم موضعی است.

به‌نام خدا

توضیحاتی در خصوص نمره‌دهی و اشتباهات رایج در سوال ۴

اشتباهات دانشجویان بیشتر متوجه موارد زیر بوده است.

- در قسمت ب) دانشجویان $n = ۳$ را درست محاسبه می‌کنند، ولی ۴ جملهٔ اوّل را با هم جمع می‌کنند، به‌جای ۳ جملهٔ اوّل. در صورت درست بودن بقیه قسمت‌ها، ۷ نمره کم شده است.
- در قسمت ب) دانشجویان $f(۱)$ را ننوشته‌اند که بعد بگویند سری متناوب است و بنابراین خطا را با استناد به خطای سری‌های متناوب، در نظر گرفته و به ادامه مطلب بپردازند. در این حالت، در صورت درستی بقیه قسمت‌ها، ۵ نمره کم شده است.
- در قسمت ب) دانشجویان جملهٔ $(n+۱)$-ام سری را کمتر از ۰٫۰۰۱ در نظر گرفته‌اند که نادرست است. باید کمتر از ۰٫۰۰۰۵ در نظر می‌گرفتند.
- در قسمت ب) دانشجویان بدون هیچ توضیحی ۴ جمله یا ۳ جملهٔ اوّل را با ۰٫۰۰۰۵ یا ۰٫۰۰۱ مقایسه کرده‌اند و نتیجه گرفته‌اند باید چند جملهٔ اوّل را با هم جمع کنند. حتی در صورت نتیجه‌گیری درست، نمره‌ای به‌این پاسخ‌های بی‌توضیح داده نشده است، مگر در حالتی‌که توجه کنند که مقدار جملهٔ $(n+۱)$-ام باید از ۰٫۰۰۰۵ کمتر باشد که در صورت قید این مطلب ۵ نمره و در صورت درست نوشتن جملهٔ $(n+۱)$-ام در مقایسه، $۵ + ۸$ نمره به ایشان داده شده است.
- در قسمت ب) دانشجویان جملهٔ $(n+۱)$-ام سری را اشتباه نوشته‌اند که ۴ نمره برای این اشتباه و بالطبع ۱۲ نمره دیگر برای ادامه راه حل کم شده است.
- در قسمت الف) تعداد زیادی از دانشجویان سعی کرده بودند سری تیلور انتگرال داده شده را مستقیما بنویسند که البته موفق هم نبوده‌اند، ولی به‌خاطر تلاش آنها، ۱ یا ۲ نمره به آن‌ها داده شده است.

پاسخ سوال ۴ آزمون پایان‌ترم درس ریاضی عمومی یک

راه‌حل قسمت الف)

ابتدا بسط مکلورن $\sin x$ را می‌نویسیم، یعنی

$$\sin x = x - \frac{x^{۳}}{۳!} + \frac{x^{۵}}{۵!} - \frac{x^{۷}}{۷!} + \cdots + (-۱)^n \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} + \cdots.$$

حال قرار می‌دهیم $x = t^2$، و داریم

$$\sin(t^2) = t^2 - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^{10}}{5!} - \frac{t^{14}}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{4n+2}}{(2n+1)!} + \cdots.$$

با انتگرال‌گیری جمله‌به‌جمله از سری فوق، روی بازهٔ $[0, x]$، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \sin(t^2)\, dt \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \times 3!} + \frac{x^{11}}{11 \times 5!} - \frac{x^{15}}{15 \times 7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3) \times (2n+1)!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3) \times (2n+1)!}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{راه‌حل قسمت ب)}}$

مقدار انتگرال قسمت قبل به‌ازای $x = 1$، یعنی $f(1)$، می‌شود

$$\begin{aligned} f(1) = \int_0^1 \sin(t^2)\, dt &= \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \times 3!} + \frac{1}{11 \times 5!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(4n+3) \times (2n+1)!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3) \times (2n+1)!}. \end{aligned}$$

برای این‌که جواب فوق که یک سری متناوب است را تا ۳ رقم اعشار حساب کنیم، کافیست تا جمله‌ای پیش برویم که خطای آن کمتر از $\frac{5}{10000}$ باشد. می‌دانیم حداکثر خطا در یک سری متناوب که تا جملهٔ n-ام نوشته شده است، از قدرمطلق اولین جملهٔ استفاده نشده، یعنی جملهٔ $(n+1)$-ام، کمتر است. پس می‌نویسیم

$$\left| \frac{(-1)^n}{(4n+3) \times (2n+1)!} \right| \leq \frac{5}{10000},$$

که کوچک‌ترین عدد صحیح برای برقراری این عبارت $n = 3$ می‌باشد. یعنی نامساوی فوق برای هر $n \geq 3$، برقرار است. پس مقدار تقریبی را برای $x = 1$، تا ۳ رقم اعشار، با جمع جملات مربوط به اندیس‌های $n = 0, 1, 2$، به‌صورت زیر داریم.

$$\int_0^1 \sin(t^2)\, dt \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \times 3!} + \frac{1}{11 \times 5!} = \frac{2867}{9240}.$$

<u>تذکر</u>: در راه‌حل، از قرارداد کتاب آدامز در معنای دقت تا ۳ رقم اعشار استفاده کردیم: دقیق بودن تا ۳ رقم اعشار یعنی تفاضل دو مقدار کمتر از ۰٫۰۰۰۵ شود. دقت شود که اگر تفاضل دو عدد کمتر از ۰٫۰۰۱ باشد

لزوما نتیجه نمی‌دهد که دو عدد با هم تا ۳ رقم اعشار برابر هستند، مثلا دو عدد

$$a = \pi = ۳/۱۴۱۵۹۲\cdots$$

و

$$b = ۳/۱۴۰۹$$

را در نظر بگیرید. به‌وضوع $|a-b| < ۰/۰۰۱$ می‌باشد، ولی a و b تا ۳ رقم اعشار برابر نیستند.