به‌نام خدا

توضیحاتی در خصوص نمره‌دهی و اشتباهات رایج در سوال ۱

- اگر $a < b$ و $c < d$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.
- وقتی به قضیه‌ای معروف، استناد می‌شود، نیاز است که نام آن قضیه آورده شود. اگر نام آن قضیه را به‌خاطر ندارید، باید صورت قضیه را بیان نمایید.
- با تنها دانستن اینکه بر بازه‌ای، $f'(x) < g'(x)$، نمی‌توان نتیجه گرفت که در این بازه، $f(x) < g(x)$. مثلاً توابع $f(x) = ۶$ و $g(x) = ۵x$ را بر بازهٔ $(۰,۱)$ بررسی نمایید.
- هر ادعایی که مطرح می‌شود باید با دلیلِ کافی، درستی‌اش اثبات شود. مثلاً مواردی از قبیل این‌که $x = a$ تنها ریشهٔ تابع است، و یا این‌که تابعی در یک بازه‌ای، مثبت، منفی، نزولی، صعودی، و ... است، بایستی استنتاج شود.
- این‌که حد تابع در یک نقطه مثبت (منفی) باشد، دلیل نمی‌شود که تابع در آن نقطه مثبت (منفی) باشد. هرچند که در یک همسایگی محذوف آن نقطه، این مطلب درست است.
- این‌که حد تابع و مقدار آن در یک نقطه مثبت (منفی) باشد، دلیل نمی‌شود که تابع در هر بازه‌ای شامل آن نقطه که از قبل در صورت سؤال مشخص شده است (یعنی در تمام طول بازه) مثبت (منفی) باشد. دقت کنید این‌که بازه‌هایی یافت شود که چنین خاصیتی داشته باشد، متفاوت است با این‌که در کل بازه‌ای که در سوال مطرح است، چنین باشد.
- با مشخص کردن مقدار تابع، تنها در دو سر یک بازه و مقایسه‌ی این دو مقدار، نمی‌توان نتیجه گرفت که این تابع در تمام طول آن بازه صعودی، و یا نزولی است.

پاسخ سوال ۱ آزمونک دوم درس ریاضی عمومی یک

راه‌حل قسمت الف):

راه‌حل اوّل: با استفاده از مشتقگیری (کاربرد مشتق)، نشان می‌دهیم تابع

$$f(x) = \frac{۳\sin x}{۲+\cos x} - x,$$

روی بازه $(-\infty, +\infty)$ نزولی است و چون در $x = ۰$ مقدار آن برابر $f(۰) = ۰$ است، پس برای $x \geq ۰$، نامساوی

$$\frac{۳\sin x}{۲+\cos x} - x \leq ۰,$$

یا معادلاً

$$\frac{۳\sin x}{۲+\cos x} \leq x,$$

برقرار خواهد بود. برای $f(x) = \frac{۳\sin x}{۲+\cos x} - x$ مشتق به‌صورت زیر است:

$$f'(x) = -\frac{(\cos x - ۱)^{۲}}{(۲+\cos x)^{۲}} \leq ۰.$$

چون f' نامثبت است، پس تابع f همواره نزولی خواهد بود و لذا برای هر $x > ۰$ مقدارش باید کمتر مساوی $f(۰) = ۰$ باشد. این یعنی

$$\frac{۳\sin x}{۲+\cos x} - x \leq ۰ \qquad \text{برای هر } x \geq ۰$$

بالاخص برای هر x بین صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ نیز این نامساوی برقرار است.

توجه: ما از این قضیه استفاده کرده‌ایم که اگر f روی بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر و $f'(x) \leq ۰$ برای هر $x \in (a,b)$، آن‌گاه f روی بازهٔ (a,b) نزولی خواهد بود؛ یعنی اگر $y > x$، آن‌گاه $f(y) \leq f(x)$.

اثبات این مطلب به‌کمک قضیه مقدار میانگین انجام می‌شود. یعنی به‌صورت زیر:

$$f(y) - f(x) = f'(c_{x,y})(y-x), \qquad \text{برای یک } c_{x,y} \text{ مناسب در بازه } (x,y)$$

چون همواره $f' \leq ۰$، و $y - x \geq ۰$، پس از تساوی فوق نتیجه می‌شود:

$$f(y) - f(x) \leq ۰,$$

یا معادلاً $f(y) \leq f(x)$ برای هر x و y دلخواه در بازه (a,b) و $x > y$. این همان نزولی بودن f است.

راه‌حل دوم: با استفاده از قضیه مقدار میانگین، برقراریِ نامساوی را نشان می‌دهیم. قرار می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{۳\sin x}{۲+\cos x}, \qquad g(x) = x.$$

طبق قضیه مقدار میانگین می‌دانیم که $c \in (۰,x) \subseteq (۰,\frac{\pi}{۲})$ وجود دارد به‌قسمی‌که می‌توان نوشت:

$$\frac{f(x)-f(۰)}{g(x)-g(۰)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

چون $f(۰) = g(۰) = ۰$، پس:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\frac{۳+۶\cos c}{(۲+\cos c)^۲}}{۱} = \frac{۳+۶\cos c}{(۲+\cos c)^۲}.$$

عبارت آخر به‌وضوح کمتر یا مساوی یک ۱ است، چرا که داریم:

$$\begin{aligned} \frac{۳+۶\cos c}{(۲+\cos c)^۲} \leq ۱ &\iff ۳+۶\cos c \leq (۲+\cos c)^۲ \\ &\iff ۳+۶\cos c - ۴ - ۴\cos c - \cos^۲ c \leq ۰ \\ &\iff -(\cos c - ۱)^۲ \leq ۰. \end{aligned}$$

پس:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{۳+۶\cos c}{(۲+\cos c)^۲} \leq ۱ \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \leq g(x).$$

و این نیز یعنی:

$$\frac{۳\sin x}{۲+\cos x} \leq x,$$

که برای هر $x \geq ۰$، و بالاخص برای هر x بین صفر و $\frac{\pi}{۲}$ برقرار است.

راه‌حل قسمت ب):

طبق قسمت الف)، می‌دانیم که نامساوی زیر

$$\frac{۳\sin x}{۲+\cos x} \leq x$$

برای هر $x > ۰$ و بالاخص برای $x = \frac{\pi}{۶}$ برقرار است.

پس این مقدار خاص را در نامساوی فوق قرار می‌دهیم تا تخمینی برای کران پایین عدد π به‌دست آوریم.

برای محاسبه مربوط به کسر فوق از ماشین حساب بهره می‌گیریم.

$$\frac{۳\sin\frac{\pi}{۶}}{۲+\cos\frac{\pi}{۶}} \leq \frac{\pi}{۶} \quad \iff \quad \frac{۱۸\sin\frac{\pi}{۶}}{۲+\cos\frac{\pi}{۶}} \leq \pi \qquad \Longrightarrow \qquad ۳/۱۴۰۲۳۷۳۴۳۴ \leq \pi.$$

به‌نام خدا

توضیحاتی در خصوص نمره‌دهی و اشتباهات رایج در سوال ۲

- در قسمت الف)، غالباً مشتق ضمنی به درستی گرفته شده، اما در مواردی اندک، بی‌دقتی صورت گرفته و مشتق نسبت به y گرفته شده است. در ادامه قسمت الف)، عمده ایرادات به پیدا کردن چندجمله‌ای مربوط بوده است. از آن‌جایی‌که بی‌دقتی در به‌دست آوردن چندجمله‌ای و مشتق چندجمله‌ای، تا انتهای سوال، و در نتیجه بر روی جواب نهایی، اثر مستقیم داشته است، اشتباهات فوق باعث کسر نمره عمده از این سوال شده است.

در قسمت ب)، از آن‌جایی‌که صورت سوال بر استفاده از روش نیوتن تاکید داشته است، چنان‌چه در راه‌حل از این روش استفاده نشده، حتی با وجود جواب صحیح، کسر نمره لحاظ شده است. در این قسمت و قسمت ج)، اشتباه رایج، اشتباهات محاسباتی بوده است.

پاسخ سوال ۲ آزمونک دوم درس ریاضی عمومی یک

الف) محاسبهٔ $\frac{dy}{dx}$، به‌کمک مشتق ضمنی، به‌صورت زیر انجام می‌شود.

$$۴x^۳+۴\frac{dy}{dx}y^۳-۸y-۸x\frac{dy}{dx}=۰ \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{۴x^۳-۸y}{۴y^۳-۸x}.$$

از آن‌جایی‌که فوقانی‌ترین نقطه، یک نقطهٔ اکسترمم است، در نتیجه بنا بر قضیهٔ فرما، مقدار $\frac{dy}{dx}$ در آن نقطه برابر با صفر خواهد بود. پس برای یافتن آن، $\frac{dy}{dx}=۰$ را حل می‌کنیم.

$$\frac{dy}{dx}=۰ \quad\Longleftrightarrow\quad ۴x^۳-۸y=۰ \quad\Longleftrightarrow\quad y=\frac{x^۳}{۲}.$$

از آن‌جایی‌که رابطهٔ $y=\frac{x^۳}{۲}$ برای هر نقطهٔ اکسترمم، و از جمله فوقانی‌ترین نقطه برقرار است، با جایگذاری آن در ضابطهٔ منحنی خواهیم داشت

$$x^۴+\left(\frac{x^۳}{۲}\right)^۴-۸x\left(\frac{x^۳}{۲}\right)=۱ \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{x^{۱۲}}{۱۶}-۳x^۴-۱=۰.$$

بنابراین چندجمله‌ای

$$p(x)=\frac{x^{۱۲}}{۱۶}-۳x^۴-۱,$$

چندجمله‌ای مطلوبی است که مختصات x از نقطهٔ فوقانی (x,y) در آن صدق می‌کند.

بارم:

ب) با تعیین علامت و رسم تقریبی نمودار $y = p(x)$، و همچنین استفاده از خاصیت مقدار بینی، می‌توان متوجه شد که $p(x)$ دو ریشه دارد، یکی در بازهٔ $(۰, ۲)$ و دیگری در بازهٔ $(-۲, ۰)$.
می‌دانیم

$$p'(x) = \frac{۱۲}{۱۶}x^{۱۱} - ۱۲x^{۳} = \frac{۳}{۴}x^{۱۱} - ۱۲x^{۳}.$$

بنابراین دنبالهٔ حاصل از روش نیوتن برای یافتن ریشه‌های $p(x) = ۰$، به‌صورت زیر خواهد بود.

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{x_n^{۱۲}}{۱۶} - ۳x_n^{۴} - ۱}{\frac{۳}{۴}x_n^{۱۱} - ۱۲x_n^{۳}} = x_n - \frac{x_n^{۱۲} - ۴۸x_n^{۴} - ۱۶}{۱۲x_n^{۱۱} - ۱۹۲x_n^{۳}}.$$

توجه شود که برای استفاده از روش نیوتن بایستی همگرایی روش نیز تضمین شود. بنا بر قضیهٔ همگرایی روش نیوتن (مطرح شده در کلاس درس) مشتق چندجمله‌ای نباید در بازهٔ انتخابی که نقطهٔ شروع روش نیوتن از آن انتخاب می‌شود، صفر شود. $x_۱ = ۲$، انتخاب مناسبی است که منجر به ریشه‌ای از $p(x)$ خواهد بود که متناظر با نقطهٔ فوقانی است. (توجه کنید $x_۱ = -۲$ منجر به ریشه‌ای خواهد شد که متناظر تحتانی‌ترین نقطهٔ منحنی است.) در این‌صورت با توجه به دنبالهٔ بازگشتی فوق، خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} x_۲ &\approx ۱/۸۵۶۲۵, \\ x_۳ &\approx ۱/۷۴۲۸۲, \\ x_۴ &\approx ۱/۶۶۸۴۸, \\ x_۵ &\approx ۱/۶۳۶۹۴, \\ x_۶ &\approx ۱/۶۳۱۸۵. \end{aligned}$$

$x_۶$ جواب مطلوب است چون دو رقم اوّل اعشار، دیگر تغییر نکرده است.

بارم:

ج) از جایگذاری مقدار $x = x_۶ \approx ۱/۶۳۱۸۵$ در ضابطهٔ منحنی، و یا رابطهٔ $y = \frac{x^۳}{۲}$، بدست می‌آید

$$y = ۲/۱۷۲۷۵,$$

که در واقع مختص y از نقطهٔ فوقانی است.

بارم:

به‌نام خدا

توضیحاتی در خصوص نمره‌دهی و اشتباهات رایج در سوال ۳

- وقتی برای یک موضوع یا پدیدهٔ فیزیکی، رابطه‌ای وجود دارد و از قوانین خاصی پیروی می‌کند، نمی‌توان روابطی جدید و یا تقریب‌هایی نادقیق را جایگزینِ آن نمود و انتظار داشت که بدون دلیل پذیرفته شوند. مثلاً به‌جای قانون تبرید نیوتن، رابطه‌ای خطی را نوشت و بدون بیان دلیل، از آن استفاده کرد. البته ممکن است شما قانون جدیدی برای انتقال حرارت ارائه دهید تا از آن استفاده کنید، ولی این کار بدون توجیه درستی آن، به‌کمک فیزیک پدیده، قابل قبول نیست.

پاسخ سوال ۳ آزمونک دوم درس ریاضی عمومی یک

بنابر قانون تبرید نیوتن، تحول دما به‌صورت زیر است:

$$T(t) = ۲۰ + Ce^{-rt},$$

که در آن ثابت‌های C و r، ثابت‌های فیزیکی هستند. حال با اطلاعات مسئله آنها را می‌یابیم.

طبق گفته‌های مسئله می‌دانیم:

$$۳۳ = ۲۰ + Ce^{-۱۴r} \implies ۱۳ = Ce^{-۱۴r}$$
$$۳۱ = ۲۰ + Ce^{-۱۵r} \implies ۱۱ = Ce^{-۱۵r}$$

از حل این دو معادله اخیر برای r، داریم:

$$e^r = \frac{۱۳}{۱۱} \implies r = \ln\frac{۱۳}{۱۱} \approx ۰/۱۶۷.$$

حال با جایگذاری $r = \ln\frac{۱۳}{۱۱}$، یا $e^r = \frac{۱۳}{۱۱}$ در یکی از معادلات، مقدار C را نیز می‌یابیم. یعنی:

$$۳۳ = ۲۰ + Ce^{-۱۴\times\ln\frac{۱۳}{۱۱}} \implies C = \frac{۱۳}{e^{-۱۴\times\ln\frac{۱۳}{۱۱}}} \approx ۱۳۴/۷۸۸.$$

پس نهایتاً

$$T(t) \approx ۲۰ + ۱۳۴/۷۸۸e^{-۰/۱۶۷t}.$$

چون دقیقاً از لحظه وقوع قتل دمای بدن شروع به کاهش می‌کند (تا نهایتاً در بینهایت به دمای اتاق، یعنی ۲۰ درجه سانتیگراد، برسد) و چون به‌علاوه دمای بدن یک انسان زنده برابر ۳۷ درجه سانتیگراد است، پس باید ببینیم که در چه زمانی $T(t)$ برابر ۳۷ بوده، تا زمان قتل مشخص شود. پس داریم:

$$۳۷ = T(t) \approx ۲۰ + ۱۳۴/۷۸۸e^{-۰/۱۶۷t} \implies t \approx -\frac{\ln\frac{۱۷}{۱۳۴/۷۸۸}}{۰/۱۶۷} \implies t \approx ۱۲/۴.$$

پس قتل در حدود ساعت ۱۲ و ۲۴ دقیقه رخ داده است.