



آزمونک اول درس ریاضی عمومی ۱

سوال ۱ . با استفاده از روش تصنیف، یک بازه $[a, b]$ از طول حداکثر $\frac{1}{10}$ ارائه کنید که به طور حتم مطمئن باشیم که یک ریشه معادله $x^3 + x + 1 = 0$ در آن قرار داشته باشد.

سوال ۲ . فرض کنید f یک تابع حقیقی باشد به طوری که $\lim_{x \rightarrow \cdot} f(x) = 0$ و g_1, g_2, \dots, g_n توابعی حقیقی باشند به طوری که برای هر $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow \cdot} g_i(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{g_i(x) - 1}{f(x)}$ موجود باشد.

نشان دهید:

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{g_1(x)g_2(x) \dots g_n(x) - 1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{g_1(x) - 1}{f(x)} + \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{g_2(x) - 1}{f(x)} + \dots + \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{g_n(x) - 1}{f(x)}.$$

سوال ۳ . دو عدد حقیقی مثبت $a < b$ را در نظر می گیریم. دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با ضابطه $a_n = b, a_1 = a$ و برای $n > 2$ $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$ را در نظر می گیریم.

(الف) نشان دهید زیر دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متشکل از جملات با اندیس فرد (یعنی زیر دنباله (a_1, a_3, \dots)) تشکیل یک دنباله صعودی می دهند.

(ب) نشان دهید زیر دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متشکل از جملات با اندیس زوج (یعنی زیر دنباله (a_2, a_4, \dots)) تشکیل یک دنباله نزولی می دهند.

(ج) نشان دهید هر جمله دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ در بازه $[a, b]$ قرار دارد.

(د) نشان دهید زیر دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متشکل از جملات با اندیس فرد (یعنی زیر دنباله (a_1, a_3, \dots)) همگراست.

(ه) نشان دهید زیر دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متشکل از جملات با اندیس زوج (یعنی زیر دنباله (a_2, a_4, \dots)) همگراست.

(و) نتیجه بگیرید دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست.

(ز) (قسمت اختیاری) حد دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را بیابید.