② تابع $f(x,y)=x^2y^2$ هم نسبت به x و هم نسبت به y زوج است. پس طبق فرمولهای صفحه 37 کتاب:

$$C_{nm}=d_{nm}=0, \qquad b_{nm}=d_{nm}=0$$

با قرار دادن $p=\pi$ ، $q=\pi$ و $f(x,y)=x^2y^2$ داریم:

$$a_{nm}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2y^2\cos nx\cos my\,dx\,dy=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}x^2y^2\cos nx\cos my\,dx\,dy$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\times\frac{2\pi(-1)^n}{n^2}\times\frac{2\pi(-1)^m}{m^2}$$

$$\Rightarrow\quad a_{nm}=\frac{16(-1)^{m+n}}{n^2m^2}, \qquad n,m=1,2,\dots$$

$$a_{00}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}x^2y^2\,dx\,dy=\frac{4}{\pi^2}\times\frac{\pi^3}{3}\times\frac{\pi^3}{3}=\frac{4\pi^4}{9}$$

$$a_{0m}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}x^2y^2\cos my\,dx\,dy=\frac{4}{\pi^2}\times\frac{\pi^3}{3}\times\frac{2\pi(-1)^m}{m^2}=\frac{8\pi^2(-1)^m}{3m^2}$$

$$a_{n0}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}x^2y^2\cos nx\,dx\,dy=\frac{4}{\pi^2}\times\frac{2\pi(-1)^n}{n^2}\times\frac{\pi^3}{3}=\frac{8\pi^2(-1)^n}{3n^2}$$

درنتیجه:

$$x^2y^2=\frac{\pi^4}{9}+\frac{4\pi^2}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^2}\cos my+\frac{4\pi^2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16(-1)^{n+m}}{n^2m^2}\cos nx\cos my$$

④ معادله اشترم-لیوویل مربوط به متغیر x :

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(0), \quad X'(1) = -X(1) \end{cases}$$

برای $\lambda = 0$:

$$X'' = 0 \Rightarrow X(x) = ax + b$$

$$\left.\begin{aligned} X'(0) = X(0) &\Rightarrow a = b \\ X'(1) = -X(1) &\Rightarrow a = -a-b \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow X(x) = 0 \qquad \cancel{X}$$

برای $\lambda = -\alpha^2 < 0$: معادله مشخصه مسأله $X'' - \alpha^2 X = 0$ به صورت $r^2 - \alpha^2 = 0$ است در نتیجه: $r_1 = \alpha, \ r_2 = -\alpha$

$$\Rightarrow X(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x} \Rightarrow X'(x) = \alpha Ce^{\alpha x} - \alpha De^{-\alpha x}$$

$$X'(0) = X(0) \Rightarrow \alpha C - \alpha D = C + D \Rightarrow C(\alpha - 1) = D(1+\alpha) \qquad \text{I}$$

$$X'(1) = -X(1) \Rightarrow \alpha Ce^{\alpha} - \alpha De^{-\alpha} = -(Ce^{\alpha} + De^{-\alpha}) \Rightarrow Ce^{2\alpha}(\alpha+1) = D(\alpha-1) \qquad \text{II}$$

اگر $\alpha = 1$: از I داریم $D = 0$ و با جایگذاری در II : $2Ce^2 = 0 \Rightarrow C = 0$

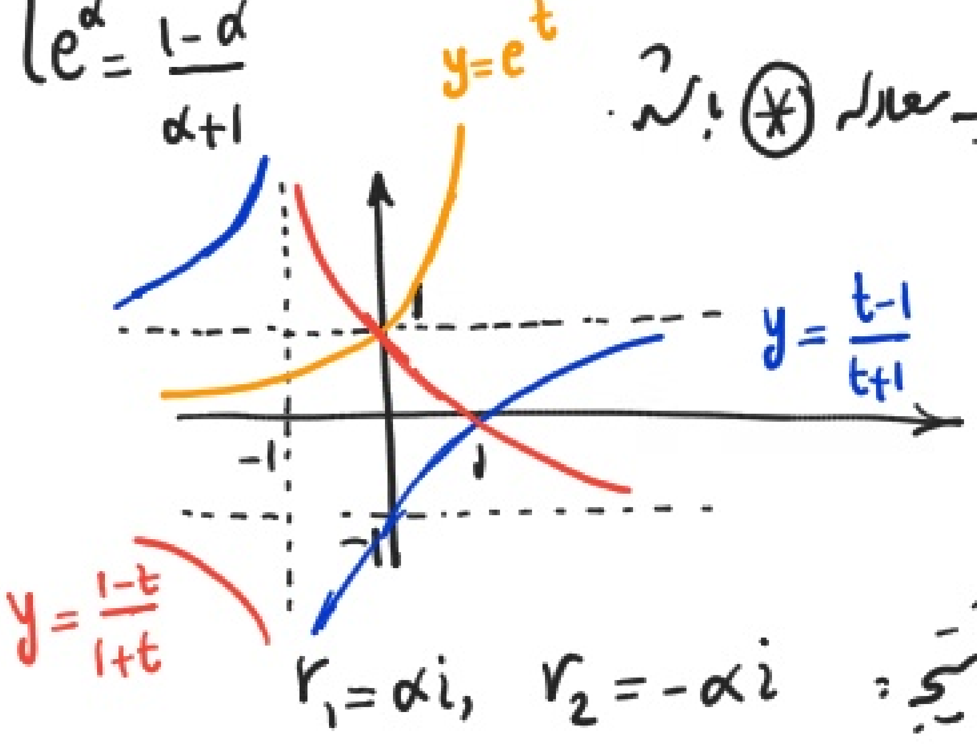
در این حالت $X(x) = 0$ ، لذا $\lambda = -1^2$ مقدار ویژه نیست.

اگر $\alpha \neq 1$: از I داریم $C = D\left(\frac{1+\alpha}{\alpha-1}\right)$ با جایگذاری در II داریم:

$$De^{2\alpha}\frac{(\alpha+1)^2}{(\alpha-1)} = D(\alpha-1) \overset{\alpha\neq 1}{\Rightarrow} D\left(e^{2\alpha}(\alpha+1)^2 - (\alpha-1)^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} D = 0 \overset{\text{I}}{\Rightarrow} C = 0 \Rightarrow X(x) = 0 \ \cancel{X} \\ \text{یا} \\ e^{2\alpha}(\alpha+1)^2 - (\alpha-1)^2 = 0 \Rightarrow e^{\alpha}(\alpha+1) = \pm(\alpha-1) \ (*) \end{cases}$$

توجه داریم که $\alpha = -1$ در رابطه (*) صدق نمی‌کند. پس فرض می‌کنیم $\alpha \neq -1$ و حالت های زیر را داریم:

$$\begin{cases} e^{\alpha} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \\ \text{یا} \\ e^{\alpha} = \frac{1-\alpha}{\alpha+1} \end{cases}$$



با رسم نمودار توابع $y = e^t$ ، $y = \frac{t-1}{t+1}$ ، $y = \frac{1-t}{t+1}$ متوجه می‌شویم که تنها $\alpha = 0$ می‌تواند جواب معادله (*) باشد.

اما فرض ما در این قسمت این بود که $\alpha \neq 0$ $(\lambda = -\alpha^2 < 0)$، پس (*) جواب غیر صفر ندارد.

پس در این حالت باید $D = 0$ و در نتیجه بنا به I ، $C = 0$ و در نهایت $X(x) = 0$.

پس مقدار ویژه منفی وجود ندارد.

برای $\lambda = \alpha^2 > 0$: معادله مشخصه مسأله $X'' + \alpha^2 X = 0$ به صورت $r^2 + \alpha^2 = 0$ است در نتیجه: $r_1 = \alpha i, \ r_2 = -\alpha i$

بدون کاستن از کلیت فرض کنید $\alpha > 0$.

$$\Rightarrow X(x) = C\cos\alpha x + D\sin\alpha x \Rightarrow X'(x) = -\alpha C\sin\alpha x + \alpha D\cos\alpha x$$

$$X'(0) = X(0) \Rightarrow \alpha D = C \qquad \text{III}$$

$$X'(1) = -X(1) \Rightarrow -\alpha C\sin\alpha + \alpha D\cos\alpha = -C\cos\alpha - D\sin\alpha \Rightarrow D(\alpha\cos\alpha + \sin\alpha) + C(\cos\alpha - \alpha\sin\alpha) = 0 \qquad \text{IV}$$

با جایگذاری III در IV داریم:

$$D\left(\alpha\cos\alpha + \sin\alpha + \alpha\cos\alpha - \alpha^2\sin\alpha\right) = 0$$

اگر $D = 0$ باشد با توجه به III ، $C = 0$ و در نتیجه $X(x) = 0$. دنبال $X \neq 0$ می‌گردیم. پس فرض می‌کنیم $D \neq 0$ و لذا تساوی بالا ایجاب می‌کند:

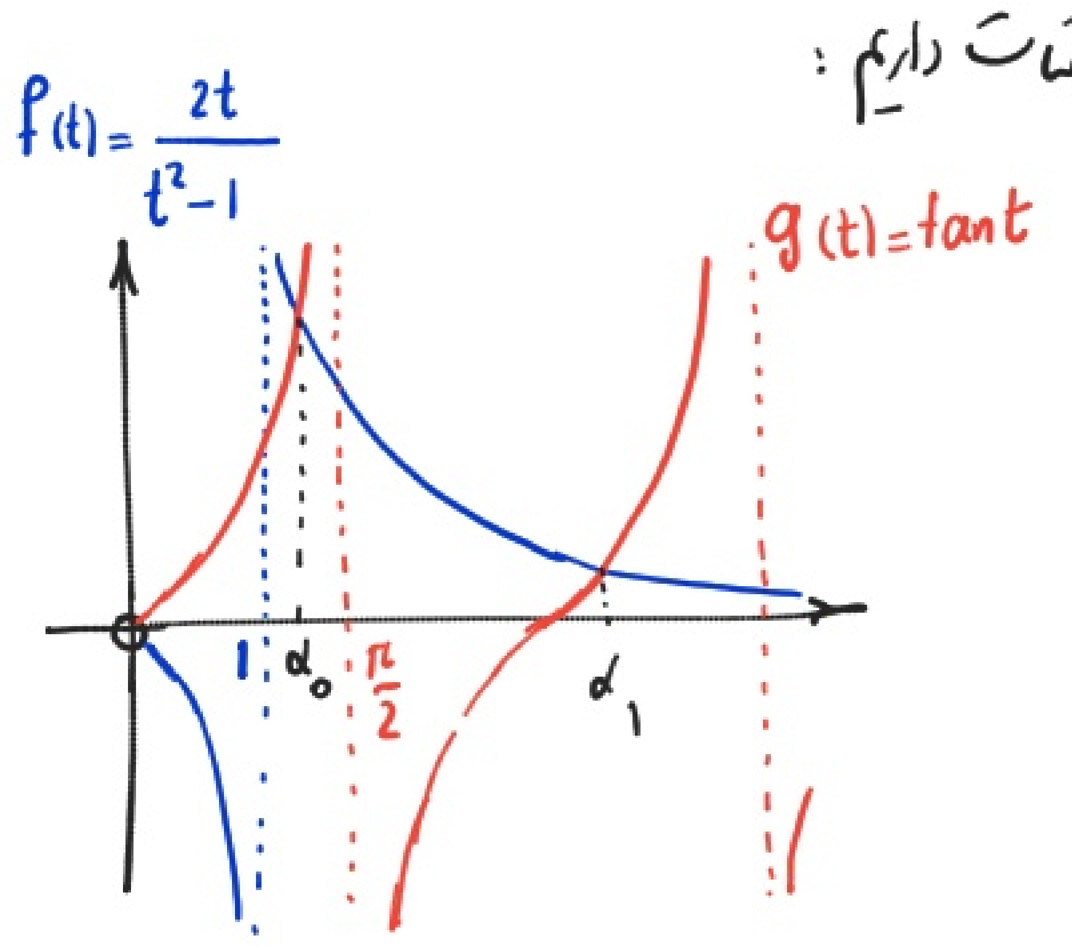
$$\alpha\cos\alpha + \sin\alpha + \alpha\cos\alpha - \alpha^2\sin\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\,(\alpha^2-1) = 0 \quad \text{(V)}$$

اگر $\cos\alpha = 0$ آنگاه $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}$ و درنتیجه $\sin\alpha = (-1)^k$ و تساوی بالا ایجاب می‌کند که: $(k\pi+\frac{\pi}{2})^2 - 1 = 0$

که برای $k\in\mathbb{Z}$ امکان‌پذیر نیست. پس $\cos\alpha \neq 0$ و با تقسیم تساوی (V) بر $\cos\alpha$ داریم: $2\alpha - \tan\alpha\,(\alpha^2-1) = 0$

توجه داریم در این تساوی α^2 نمی‌تواند برابر یک باشد ($\alpha \neq 1$) درنتیجه: $\tan\alpha = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2-1}$

با رسم دو تابع $f(t) = \dfrac{2t}{t^2-1}$ ، $g(t) = \tan t$ برای $t>0$ در یک دستگاه مختصات داریم:



پس $\alpha_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ ، $\alpha_1 \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ و ... و $\alpha_n \in (n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2})$ و ... (برای $n = 1, 2, \dots$) جواب‌های معادله $\tan\alpha = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1}$ هستند. پس

$\lambda_1 = \alpha_1^2$ ، $\lambda_2 = \alpha_2^2$ و ... مقادیر ویژه مسئله و $X_n(x) = D\alpha_n\cos\alpha_n x + D\sin\alpha_n x$ بردار ویژه نظیر آن‌ها برای حالات است.

برای سادگی بگیرید $D=1$ ، پس داریم $X_n = \alpha_n\cos\alpha_n x + \sin\alpha_n x$ (برای حالتی که $\alpha<0$ ، مشابه بالا و با در نظر گرفتن $D=-1$ به همین جواب می‌رسیم)

بگیرید $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n\cos\alpha_n x + \sin\alpha_n x)\, T_n(t)$ و این سری را در معادله اصلی قرار دهید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\ddot{T}_n + a^2\alpha_n^2 T_n\right)(\alpha_n\cos\alpha_n x + \sin\alpha_n x) = 0 \Rightarrow \ddot{T}_n + a^2\alpha_n^2 T_n = 0$$

$$\Rightarrow T_n(t) = A_n\cos(a\alpha_n t) + B_n\sin(a\alpha_n t)$$

با اعمال شرط اولیه $u_t(x,0) = 0$ داریم:

$$u_t(x,0) = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n\cos\alpha_n x + \sin\alpha_n x)(a\alpha_n B_n) = 0 \Rightarrow a\alpha_n B_n = 0 \xRightarrow[\alpha_n \neq 0]{a\neq 0} \boxed{B_n = 0}$$

به این ترتیب داریم:

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\alpha_n\cos\alpha_n x + \sin\alpha_n x)\cos(a\alpha_n t)$$

با اعمال شرط اولیه $u(x,0) = x$ داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\alpha_n\cos\alpha_n x + \sin\alpha_n x) = x$$

که در آن

$$A_n = \frac{\langle x, (\alpha_n\cos\alpha_n x + \sin\alpha_n x)\rangle}{\langle(\alpha_n\cos\alpha_n x + \sin\alpha_n x), (\alpha_n\cos\alpha_n x + \sin\alpha_n x)\rangle}$$

$$\langle(\alpha_n\cos\alpha_n x+\sin\alpha_n x),(\alpha_n\cos\alpha_n x+\sin\alpha_n x)\rangle=\int_0^1(\alpha_n\cos\alpha_n x+\sin\alpha_n x)^2\,dx=\int_0^1\left[\alpha_n^2\cos^2\alpha_n x+\sin^2\alpha_n x+\alpha_n\sin 2\alpha_n x\right]dx$$

$$=\alpha_n^2\int_0^1\cos^2\alpha_n x\,dx+\int_0^1\sin^2\alpha_n x\,dx+\alpha_n\int_0^1\sin 2\alpha_n x\,dx$$

$$=\alpha_n^2\int_0^1\frac{1+\cos 2\alpha_n x}{2}\,dx+\int_0^1\frac{1-\cos 2\alpha_n x}{2}\,dx+\alpha_n\int_0^1\sin 2\alpha_n x\,dx$$

$$=\frac{\alpha_n^2+1}{2}\int_0^1 dx+\frac{\alpha_n^2-1}{2}\int_0^1\cos 2\alpha_n x\,dx+\alpha_n\int_0^1\sin 2\alpha_n x\,dx$$

$$=\frac{\alpha_n^2+1}{2}+\frac{\alpha_n^2-1}{2}\left.\frac{\sin 2\alpha_n x}{2\alpha_n}\right|_0^1-\alpha_n\left.\frac{\cos 2\alpha_n x}{2\alpha_n}\right|_0^1$$

$$=\frac{\alpha_n^2+2}{2}+\frac{\alpha_n^2-1}{4\alpha_n}\sin 2\alpha_n-\frac{1}{2}\cos 2\alpha_n$$

$$\langle x,(\alpha_n\cos\alpha_n x+\sin\alpha_n x)\rangle=\int_0^1(\alpha_n x\cos\alpha_n x+x\sin\alpha_n x)\,dx=\alpha_n\int_0^1 x\cos\alpha_n x\,dx+\int_0^1 x\sin\alpha_n x\,dx$$

$$=\alpha_n\left[\left.x\frac{\sin\alpha_n x}{\alpha_n}\right|_0^1-\frac{1}{\alpha_n}\int_0^1\sin\alpha_n x\,dx\right]-\left.\frac{x\cos\alpha_n x}{\alpha_n}\right|_0^1+\frac{1}{\alpha_n}\int_0^1\cos\alpha_n x\,dx$$

$$=\sin\alpha_n+\left.\frac{\cos\alpha_n x}{\alpha_n}\right|_0^1-\frac{\cos\alpha_n}{\alpha_n}+\frac{1}{\alpha_n^2}\left.\sin\alpha_n x\right|_0^1$$

$$=\sin\alpha_n+\frac{\cos\alpha_n}{\alpha_n}-\frac{1}{\alpha_n}-\frac{\cos\alpha_n}{\alpha_n}+\frac{\sin\alpha_n}{\alpha_n^2}$$

$$=\sin\alpha_n+\frac{\sin\alpha_n}{\alpha_n^2}-\frac{1}{\alpha_n}$$

$$\Rightarrow A_n=\frac{\sin\alpha_n\left(1+\frac{1}{\alpha_n^2}\right)-\frac{1}{\alpha_n}}{\frac{\alpha_n^2+2}{2}+\frac{\alpha_n^2-1}{4\alpha_n}\sin 2\alpha_n-\frac{1}{2}\cos 2\alpha_n}$$

پس جواب مسأله بصورت $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\alpha_n\cos\alpha_n x+\sin\alpha_n x)\cos(a\alpha_n t)$ که A_n طبق بالا می‌باشد.

(6)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r<a,\ 0<\theta<\pi \\ u(r,0)=u(r,\pi)=0, & u(a,\theta)=\theta(\pi-\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2u_{rr}+ru_r+u_{\theta\theta}=0 & (*) \\ u(r,0)=u(r,\pi)=0, & u(a,\theta)=\theta(\pi-\theta) \end{cases}$$

معادله اشتروم - لیوویل نسبت به θ :

$$\begin{cases} \ddot{\Theta}+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta(\pi)=0 \end{cases}$$

برای حل این معادله اشتروم - لیوویل قابل حل است. کافی است قرار دهیم $\lambda=\alpha^2>0$ که در این صورت چندجمله‌ای مشخصه به صورت $r^2+\alpha^2=0$ خواهد بود که نتیجه می‌دهد $r=\pm\alpha i$، پس

$$\Theta(\theta)=A\sin\alpha\theta+B\cos\alpha\theta$$

$$\Theta(0)=B=0$$

$$\Theta(\pi)=A\sin\alpha\pi=0 \Rightarrow \alpha\pi=n\pi \Rightarrow \alpha=n$$

که در این صورت $\lambda_n=n^2$ و $\Theta_n(\theta)=\sin n\theta$. قرار دهید

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}R_n(r)\sin n\theta$$

سری فوق را در معادله (*) قرار دهید :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(r^2R_n''+rR_n'-n^2R_n\right)\sin n\theta=0 \Rightarrow r^2R_n''+rR_n'-n^2R_n=0$$

چندجمله‌ای مشخصه برای معادله کوشی - اویلر فوق به صورت $z^2-n^2=0$ است که ایجاب می‌کند $z=\pm n$:

$$\Rightarrow R_n(r)=c_nr^n+d_nr^{-n}$$

$$\Rightarrow u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_nr^n+d_nr^{-n}\right)\sin n\theta$$

از طرفی چون $r<a$ و باید $R_n(r)$ کراندار باشد، پس باید $d_n=0$. در نتیجه:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nr^n\sin n\theta \xrightarrow{u(a,\theta)=\theta(\pi-\theta)} \sum_{n=0}^{\infty}c_na^n\sin n\theta=\theta(\pi-\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\sin n\theta$$

که در آن

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\theta(\pi-\theta)\sin n\theta\,d\theta=\frac{-4}{\pi n^3}\left((-1)^n-1\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}c_na^n\sin n\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-4}{\pi n^3}\left((-1)^n-1\right)\sin n\theta \Rightarrow c_na^n=\frac{-4}{\pi n^3}\left((-1)^n-1\right)$$

$$\xRightarrow{a\neq 0} c_n=\frac{-4}{n\pi^3a^n}\left((-1)^n-1\right)$$

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-4}{n\pi^3}\left(\frac{r}{a}\right)^n\sin n\theta$$

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \qquad 0<x<a, \quad 0<y<b, \quad 0<z<d, \quad t>0$$ 9

$$u(x,y,z,0) = xyz, \qquad u_t(x,y,z,0) = 0,$$

$$u(0,y,z,t) = 0, \qquad u(x,0,z,t) = 0, \qquad u(x,y,0,t) = u(x,y,d,t),$$

$$u(a,y,z,t) = 0, \qquad u_y(x,b,z,t) = 0, \qquad u_z(x,y,0,t) = u_z(x,y,d,t)$$

مسأله اشترم-لیوویل x به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

اگر $\lambda = 0$، به راحتی $X=0$. اگر $\lambda = -\alpha^2 < 0$، باز هم به راحتی $X=0$. اگر $\lambda = \alpha^2 > 0$، معادله مشخصه به صورت $r^2+\alpha^2 = 0$ است و داریم:

$$r = \pm \alpha i \Rightarrow X(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$X(a) = 0 \Rightarrow c_2 \sin \alpha a = 0 \overset{c_2 \neq 0}{\Longrightarrow} \sin \alpha a = 0 \Rightarrow \alpha a = n\pi \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{a}$$

پس $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$ و $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}$.

مسأله اشترم-لیوویل y به صورت $\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(0) = 0, \; Y'(b) = 0 \end{cases}$ است. اگر $\lambda = 0$ یا $\lambda = -\alpha^2 < 0$، باز هم به راحتی می‌توان دید که $Y=0$.

اگر $\lambda = \alpha^2 > 0$، جواب‌های معادله مشخصه به صورت $r = \pm \alpha i$ خواهد بود در نتیجه:

$$Y(y) = c_1 \cos \alpha y + c_2 \sin \alpha y \Rightarrow Y'(y) = -c_1 \alpha \sin \alpha y + c_2 \alpha \cos \alpha y$$

$$Y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$Y'(b) = 0 \Rightarrow c_2 \alpha \cos \alpha b = 0 \underset{c_2 \neq 0}{\overset{\alpha \neq 0}{\Longrightarrow}} \cos \alpha b = 0 \Rightarrow \alpha b = (m+\tfrac{1}{2})\pi \Rightarrow \alpha = (m+\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{b}$$

پس $\lambda_m = \frac{(m+\frac{1}{2})^2}{b^2}\pi^2$ و $Y_m = \sin\left((m+\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{b} y\right)$ (برای راحتی قرار دادیم $c_2 = 1$)

مسأله اشترم-لیوویل مربوط به z به صورت زیر است:

$$\begin{cases} Z'' + \lambda Z = 0 \\ Z(0) = Z(d), \; Z'(0) = Z'(d) \end{cases}$$

اگر $\lambda=0$ داریم: $Z(z)=c_1z+c_2$ در نتیجه $Z'(z)=c_1$. پس شرط $Z'(0)=Z'(d)$ به وضوح برقرار است.

$$Z(0)=Z(d) \Rightarrow c_2=c_1d+c_2 \Rightarrow c_1d=0 \overset{d\neq 0}{\Rightarrow} c_1=0 \Rightarrow Z(z)=c_2$$

برای راحتی کار بگیرید $c_2=1$. پس تابع ویژه متناظر به $\lambda=0$، $Z(z)=1$ است.

اگر $\lambda=-\alpha^2<0$، معادله مشخصه به صورت $r^2-\alpha^2=0$ و جواب‌های آن $r=\pm\alpha$ هستند. در این حالت $Z(z)=c_1e^{\alpha z}+c_2e^{-\alpha z}$

و $Z'(z)=c_1\alpha e^{\alpha z}-c_2\alpha e^{-\alpha z}$.

$$\begin{aligned} Z(0)=Z(d) &\Rightarrow c_1+c_2=c_1e^{\alpha d}+c_2e^{-\alpha d} \\ Z'(0)=Z'(d) &\Rightarrow c_1\alpha-c_2\alpha=c_1\alpha e^{\alpha d}-c_2\alpha e^{-\alpha d} \end{aligned} \overset{\alpha\neq 0}{\Rightarrow} \begin{cases} c_1+c_2=c_1e^{\alpha d}+c_2e^{-\alpha d} \\ c_1-c_2=c_1e^{\alpha d}-c_2e^{-\alpha d} \end{cases}$$

اگر دو معادله بالا را با هم جمع کنیم: $c_1=c_1e^{\alpha d} \Rightarrow c_1(e^{\alpha d}-1)=0$

اگر $c_1\neq 0$ داریم $e^{\alpha d}=1$ در نتیجه $\alpha d=0$ و چون $d\neq 0$ می‌توان نتیجه گرفت $\alpha=0$ که با فرض $\lambda=-\alpha^2<0$ در تناقض است. پس نتیجه می‌شود که $c_1=0$. در نتیجه $c_2=c_2e^{-\alpha d}$

و با استدلال مشابه می‌توان نتیجه گرفت که $c_2=0$. پس در این حالت $Z(z)=0$.

اگر $\lambda=\alpha^2>0$، معادله مشخصه به صورت $r^2+\alpha^2=0$ و ریشه‌های آن $r=\pm\alpha i$ هستند. در نتیجه:

$$Z(z)=c_1\cos\alpha z+c_2\sin\alpha z \Rightarrow Z'(z)=-c_1\alpha\sin\alpha z+c_2\alpha\cos\alpha z$$

$$\begin{aligned} Z(0)=Z(d) &\Rightarrow c_1=c_1\cos\alpha d+c_2\sin\alpha d \\ Z'(0)=Z'(d) &\Rightarrow c_2\alpha=-c_1\alpha\sin\alpha d+c_2\alpha\cos\alpha d \end{aligned} \overset{\alpha\neq 0}{\Rightarrow} \begin{cases} c_1=c_1\cos\alpha d+c_2\sin\alpha d \\ c_2=-c_1\sin\alpha d+c_2\cos\alpha d \end{cases}$$

c_1 برابر معادله اول را با c_2 برابر معادله دوم جمع می‌کنیم. حال داریم:

$$c_1^2+c_2^2=c_1^2\cos\alpha d+c_2^2\cos\alpha d$$

$$\Rightarrow (c_1^2+c_2^2)(1-\cos\alpha d)=0$$

چون به دنبال $Z(z)\neq 0$ هستیم پس $c_1^2+c_2^2\neq 0$ و در نتیجه تساوی بالا ایجاب می‌کند که $\cos\alpha d=1$ و در نتیجه: $\alpha d=2k\pi \Rightarrow \alpha=\frac{2k\pi}{d}$

پس $Z_k^1(z)=\cos\frac{2k\pi}{d}z$ و $Z_k^2(z)=\sin\frac{2k\pi}{d}z$ و $\lambda_k=\frac{4k^2\pi^2}{d^2}$. پس می‌توانیم پایه را به صورت مختلط انتخاب کنیم یعنی $\left\{e^{i\frac{2k\pi}{d}z}\right\}_{k=-\infty}^{k=\infty}$. در نتیجه

$$u(x,y,z,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{mnk}(t)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{(m+\frac{1}{2})\pi y}{b}\, e^{i\frac{2k\pi}{d}z}$$

با قرار دادن سری فوق در معادله اصلی داریم:

$$0=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ddot{T}_{nmk}+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2T+\left(\frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{b^2}\right)^2T+\left(\frac{2k\pi}{d}\right)^2T\right)\sin\frac{n\pi x}{a}\,\sin\frac{(m+\frac{1}{2})\pi y}{b}\,e^{i\frac{2k\pi}{d}z}$$

$$\Rightarrow \ddot{T}_{nmk}+A_{nmk}^2T=0$$

که در آن $A_{nmk}^2=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{2k\pi}{d}\right)^2>0$. (I)

$$\Rightarrow T_{nmk}(t)=a_{nmk}\cos A_{nmk}t+b_{nmk}\sin A_{nmk}t$$

$$\Rightarrow u(x,y,z,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{nmk}\cos A_{nmk}t+b_{nmk}\sin A_{nmk}t\right)\sin\frac{n\pi x}{a}\,\sin\frac{(m+\frac{1}{2})\pi y}{b}\,e^{i\frac{2k\pi}{d}z}$$

$$\Rightarrow u_t(x,y,z,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-a_{nmk}A_{nmk}\sin A_{nmk}t+b_{nmk}A_{nmk}\cos A_{nmk}t\right)\sin\frac{n\pi x}{a}\,\sin\frac{(m+\frac{1}{2})\pi y}{b}\,e^{i\frac{2k\pi}{d}z}$$

$$u_t(x,y,z,0)=0\longrightarrow\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{nmk}b_{nmk}\sin\frac{n\pi x}{a}\,\sin\frac{(m+\frac{1}{2})\pi y}{b}\,e^{i\frac{2k\pi}{d}z}=0$$

$$\Rightarrow A_{nmk}b_{nmk}=0\xrightarrow{A_{nmk}\neq0}b_{nmk}=0$$

$$u(x,y,z,0)=xyz\Rightarrow\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{nmk}\sin\frac{n\pi x}{a}\,\sin\frac{(m+\frac{1}{2})\pi y}{b}\,e^{i\frac{2k\pi}{d}z}=xyz$$

$\frac{b^2}{(m+\frac{1}{2})^2\pi^2}(-1)^m$

$$\Rightarrow a_{nmk}=\frac{2}{a}\times\frac{2}{b}\times\frac{1}{d}\int_0^d\int_0^b\int_0^a\sin\frac{n\pi x}{a}\,\sin\frac{(m+\frac{1}{2})\pi y}{b}\,e^{i\frac{2k\pi}{d}z}\,xyz\,dx\,dy\,dz$$

$$\Rightarrow a_{nmk}=\frac{4}{abd}\left(\frac{-a^2}{n\pi}(-1)^n\right)\left(\frac{b^2}{(m+\frac{1}{2})^2\pi^2}(-1)^m\right)\left(\frac{d^2}{i2k\pi}\right)=\frac{2abd\,(-1)^{m+n}}{kn(m+\frac{1}{2})^2\pi^4}\,i\quad\text{(II)}$$

در نتیجه جواب مسأله به صورت:

$$u(x,y,z,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{nmk}\cos A_{nmk}t\,\sin\frac{n\pi x}{a}\,\sin\frac{(m+\frac{1}{2})\pi y}{b}\,e^{i\frac{2k\pi}{d}z}$$

است که در آن a_{nmk} از رابطه (II) و A_{nmk} از رابطه (I) محاسبه می‌شوند.

تذکر : برای حل سؤال 7 از شرط جزئی متناوب جملگی در $n\pi$ و $-\pi$ استفاده کنید.