تمرین سری دوم ریاضی مهندسی

1

$$T = 2 \Rightarrow l = \frac{2}{2} = 1$$

$$C_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\, e^{-in\pi x}\, dx$$

توجه داریم برای محاسبه انتگرال بالا، نیاز داریم ضابطه f را در بازه مذکور مشخص کنیم. ولی ما ضابطه تابع f را در بازه $[0,2]$ بصورت $f(x)=x$ داریم و می‌دانیم دوره تناوب تابع برابر $T=2$ است. لذا ضابطه تابع f در بازه $[-2,0]$ بصورت $f(x)=x+2$ است. پس باید انتگرال بالا را به دو انتگرال در بازه‌های $[-1,0]$ و $[0,1]$ بشکنیم و به ترتیب ضابطه f را در این بازه‌ها، $(x+2)$ و x قرار دهیم:

$$C_n = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} f(x)\, e^{-in\pi x} dx + \int_{0}^{1} f(x)\, e^{-in\pi x} dx\right] = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} \underbrace{(x+2)}_{u}\, \underbrace{e^{-in\pi x} dx}_{dv} + \int_{0}^{1} \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{e^{-in\pi x} dx}_{dv}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x+2)\frac{e^{-in\pi x}}{-in\pi}\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{in\pi}\int_{-1}^{0} e^{-in\pi x} dx + x\frac{e^{-in\pi x}}{-in\pi}\Big|_{0}^{1} + \frac{1}{in\pi}\int_{0}^{1} e^{-in\pi x} dx\right]$$

$$= \frac{1}{2in\pi}\left[-2 + e^{in\pi} + \frac{e^{-in\pi x}}{-in\pi}\Big|_{-1}^{1} - e^{-in\pi}\right] = \frac{1}{2in\pi}\left[-2 + \frac{e^{-in\pi}}{-in\pi} - \frac{e^{in\pi}}{-in\pi}\right] = \frac{-1}{in\pi}$$

البته روش دیگر برای محاسبه این انتگرال استفاده از تذکر کتاب است. برای این که نیاز نباشد تا انتگرال را به دو قسمت $[-1,0]$ و $[0,1]$ بشکنیم، باید محدوده انتگرال گیری را جابجا کنیم. طبق تذکر کتاب، برای محاسبه ضرایب فوریه می‌توان هر بازه‌ای به طول T از تابع را در نظر بگیریم. چون ضابطه تابع را در بازه $[0,2]$ به صورت $f(x)=x$، داریم محدوده انتگرال گیری را $[0,2]$ در نظر گرفته و داریم:

$$C_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\, e^{-in\pi x} dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} f(x)\, e^{-in\pi x} dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\, e^{-in\pi x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\frac{e^{-in\pi x}}{-in\pi}\Big|_{0}^{2} + \frac{1}{in\pi}\int_{0}^{2} e^{-in\pi x} dx\right] = \frac{1}{2in\pi}\left[-2e^{-2n\pi i} + \frac{1}{-in\pi} e^{-in\pi x}\Big|_{0}^{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2in\pi}\left[-2 - \frac{1}{in\pi}\cancel{\left(e^{-2n\pi i} - 1\right)}^{0}\right] = \frac{-1}{in\pi} = \frac{i}{n\pi}$$

لذا سری فوریه مختلط تابع پیوسته $f(x)=x$ بصورت زیر است:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{n\pi}\, e^{in\pi x}$$

تمرین سری دوم ریاضی مهندسی

(2)

$$T=2\pi \Rightarrow l=\frac{2\pi}{2}=\pi \quad , \qquad f(x)=|\sin x|$$

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{\frac{-in\pi x}{l}}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|\, e^{-inx}\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0}\sin x\, e^{-inx}dx+\int_{0}^{\pi}\sin x\, e^{-inx}dx\right] \qquad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\frac{e^{-ix}-e^{ix}}{2i}e^{-inx}dx+\int_{0}^{\pi}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}e^{-inx}dx\right]$$

$$=\frac{1}{4i\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(e^{-i(n+1)x}-e^{-i(n-1)x}\right)dx+\int_{0}^{\pi}\left(e^{-i(n-1)x}-e^{-i(n+1)x}\right)dx\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi i}\left[\left(\frac{e^{-i(n+1)x}}{-i(n+1)}-\frac{e^{-i(n-1)x}}{-i(n-1)}\right)\Big|_{-\pi}^{0}+\left(\frac{e^{-i(n-1)x}}{-i(n-1)}-\frac{e^{-i(n+1)x}}{-i(n+1)}\right)\Big|_{0}^{\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi i}\times\frac{1}{-i}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}-\frac{\cancelto{(-1)^{n+1}}{e^{i(n+1)\pi}}}{n+1}+\frac{\cancelto{(-1)^{n-1}}{e^{i(n-1)\pi}}}{n-1}+\frac{\cancelto{(-1)^{n-1}}{e^{-i(n-1)\pi}}}{n-1}-\frac{\cancelto{(-1)^{n+1}}{e^{-i(n+1)\pi}}}{n+1}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n-1}-\frac{2\times(-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{2\times(-1)^{n-1}}{n-1}\right]=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{(2-2\times(-1)^{n+1})(n-1)-(2-2\times(-1)^{n-1})(n+1)}{n^2-1}\right]$$

$$=\frac{2}{4\pi(n^2-1)}\left[(1+(-1)^n)(n-1)-(1+(-1)^n)(n+1)\right]=\frac{(1+(-1)^n)}{2\pi(n^2-1)}(n-1-n-1)=\frac{1+(-1)^n}{\pi(1-n^2)}$$

درنتیجه:

$$c_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}\right]=\begin{cases}0 & \text{فرد } n=2m+1\\ \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1-4m^2}\right] & \text{زوج } n=2m\end{cases}$$

تمرین سری دوم ریاضی مهندسی

3

$$\begin{cases} u_{tt} - 2u_t - u_{xx} = 0 & 0<x<\pi, \quad t>0 \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

برای t ثابت، جواب این مسأله در فضای برداری $\{\varphi(x) \in C^2[0,\pi] \mid \varphi'(0)=\varphi'(\pi)=0\}$ قرار دارد. این فضا دارای پایه $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ می‌باشد. پس جواب مطلوب باید به صورت زیر باشد:

$$u(x,t) = \frac{A_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \cos nx$$

$$-n^2 \sin nx$$

اکنون تابع فوق را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\frac{A_0''(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n''(t) \cos nx - A_0'(t) - 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n'(t)\cos nx - \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 A_n(t) \cos nx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{A_0''(t)}{2} - A_0'(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n''(t) - 2A_n'(t) + n^2 A_n(t)\right) \cos nx = 0$$

پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} A_0''(t) - A_0'(t) = 0 & (*) \\ A_n''(t) - 2A_n'(t) + n^2 A_n(t) = 0 & (**) \quad n=1,2,\dots \end{cases}$$

برای $(*)$، می‌گیریم: $u = A_0'(t)$:

$$(*) \Rightarrow \frac{u'}{2} = u \Rightarrow \frac{u'}{u} = 2 \Rightarrow \ln u = 2t + c \Rightarrow u = c_0 e^{2t}$$

$$\Rightarrow A_0'(t) = c_0 e^{2t} \Rightarrow A_0(t) = \frac{c_0}{2} e^{2t} + d_0 \xRightarrow{\frac{c_0}{2} \to c_0} A_0(t) = c_0 e^{2t} + d_0$$

برای $(**)$، معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم: $r^2 - 2r + n^2 = 0$

اگر $n=1$: $r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1 \Rightarrow A_1(t) = c_1 e^t + d_1 t e^t$

اگر $n>1$: پس $\Delta = 4 - 4n^2 < 0$: $r_1 = 1 + \sqrt{n^2-1}\, i, \quad r_2 = 1 - \sqrt{n^2-1}\, i$

درنتیجه:

$$A_n(t) = e^t \left(c_n \cos \sqrt{n^2-1}\, t + d_n \sin \sqrt{n^2-1}\, t\right), \qquad n = 2,\dots$$

پس جواب عمومی معادله به صورت زیر بدست می‌آید:

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} e^{2t} + \frac{d_0}{2} + (c_1 + d_1 t) e^t \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} e^t \left(c_n \cos(\sqrt{n^2-1}\, t) + d_n \sin(\sqrt{n^2-1}\, t)\right) \cos nx$$

4

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, & 0<x<1, \quad t>0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

جواب این مسأله برای هر t ثابت در فضای برداری زیر قرار دارد:

$$V = \{ \varphi \in C^2([0,1]) \mid \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \}$$

یک پایه برای این فضای برداری عبارت است از $\{\sin n\pi x\}_{n=1}^{\infty}$. پس جواب مطلوب باید به صورت زیر باشد:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin n\pi x$$

برای تعیین جواب عمومی معادله، تابع فوق را درون معادله قرار دهیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n'(t) + 4n^2\pi^2 A_n(t) \right) \sin n\pi x = 0$$

چون $\{\sin n\pi x\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه است، روابط بالا ایجاب می‌کند که:

$$A_n'(t) + 4n^2\pi^2 A_n(t) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad A_n(t) = a_n e^{-4n^2\pi^2 t}$$

پس جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-4n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$$

تمرین سری دوم ریاضی مهندسی

⑥

$$\begin{cases} u_t - t^2 u_{xx} - u = 0, & 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & u(x,0) = \sin \pi x \end{cases}$$

با توجه به شرایط مرزی، پایه به صورت $\{\sin n\pi x\}_{n=1}^{\infty}$ خواهد بود. پس برای هر t ثابت داریم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin n\pi x$$

با قرار دادن این تابع در معادله، به دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dot{T}_n(t) + t^2 n^2 \pi^2 T_n(t) - T_n(t) \right) \sin n\pi x = 0$$

$$\Rightarrow \dot{T}_n(t) + (t^2 n^2 \pi^2 - 1) T_n(t) = 0 \Rightarrow \frac{d T_n(t)}{T_n(t)} = (1 - n^2 \pi^2 t^2)\, dt$$

$$\Rightarrow \ln T_n(t) = t - \frac{n^2 \pi^2}{3} t^3 + C_n$$

$$\Rightarrow T_n(t) = d_n e^{t - \frac{n^2 \pi^2}{3} t^3}$$

به این ترتیب جواب عمومی به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{t - \frac{n^2 \pi^2}{3} t^3} \sin n\pi x$$

حال شرط مرزی $u(x,0) = \sin \pi x$ را اعمال می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin n\pi x = \sin \pi x$$

پس

$$d_n = \frac{2}{1} \int_0^1 \sin n\pi x \sin \pi x \, dx \Rightarrow d_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = 1 \times e^{t - \frac{\pi^2}{3} t^3} \sin \pi x$$