



۱. جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

(الف)

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ب)

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

[(ج)

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^t \end{pmatrix}$$

[(د)

$$X' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

۲. هر کدام از معادلات دیفرانسیل زیر را به دستگاه معادلات دیفرانسیل از مرتبه اول تبدیل کنید.

(الف)

$$u'' + 0.5u' + 2u = 3 \sin t$$

(ب)

$$t^2 u'' + tu' + (t^2 - 0.25)u = 0$$

(ج)

$$u^{(4)} - u = 0.$$

۳. فرض کنید $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ ثابت هستند به طوری که a_{12} و a_{21} با هم صفر نیستند. همچنین g_1 و g_2 نیز توابعی مشتق پذیرند.

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1(t), \quad x_1(0) = x_1^0$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2(t), \quad x_2(0) = x_2^0$$

ثابت کنید دستگاه بالا قابل تبدیل به یک معادله درجه دوم با شرایط اولیه است.

۴. اگر $x_1 = y$ و $x_2 = y'$ ، در نتیجه معادله درجه دو زیر

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (1)$$

معادل با دستگاه زیر است:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -q(t)x_1 - p(t)x_2. \end{aligned} \quad (2)$$

نشان دهید اگر X^1 و X^2 جواب اساسی دستگاه ۲ و y^1 و y^2 جواب های اساسی معادله ۱ باشد، آنگاه $W[y^1, y^2] = cW[X^1, X^2]$ بطوریکه c ثابت غیرصفر است.

توجه:

$$W[y^1, y^2] := \begin{pmatrix} y^1(t) & y^2(t) \\ (y^1(t))' & (y^2(t))' \end{pmatrix}$$

۵. فرض کنید x^1, \dots, x^n ، جواب های مستقل خطی معادله $x' = Px$ هستند بطوریکه P در بازه $\alpha < t < \beta$ پیوسته است. هر جواب این معادله را به صورت $z(t) = c_1x^1(t) + \dots + c_nx^n(t)$ می توان نوشت. نشان دهید این ضرایب یکتا هستند.

۶. در هر کدام از دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر

الف) نقاط بحرانی را پیدا کنید.

ب) دستگاه خطی متناظر با سیستم را نزدیک این نقاط به دست آورید.

ج) مقادیر ویژه این دستگاه خطی را به دست آورده و رفتار آن را توجیه کنید. (در نزدیک هر نقطه بحرانی)

(۱)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (1+x) \sin y \\ \frac{dy}{dt} = 1-x-\cos y \end{cases}$$

(۲)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - x^2 - xy \\ \frac{dy}{dt} = (2-x)(y + 0.5x) \end{cases}$$

(۳)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y - x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = x - y + y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

۷. مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + g(t) \\ X(\cdot) = X_0, \end{cases}$$

بطوریکه A ماتریسی ثابت است.

الف) ثابت کنید $X(t) = \phi(t)X_0 + \int_0^t \phi(t-s)g(s) ds$.

ب) ثابت کنید $X(t) = \exp(At)X_0 + \int_0^t \exp[A(t-s)]g(s) ds$.