ریاضی عمومی ۲ **(بهار ۹۹)**

تمرین‌های سری هفتم

مدرس: علیشاهی و شریفی تبار

تمرین ۱

اگر معادلات $x = f(u, v)$ و $y = g(u, v)$ را بتوان نسبت به u و v برحسب x و y حل کرد، نشان دهید که

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}.$$

تمرین ۲

اگر $F(x, y, z) = 0$ نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.$$

برای $F(x, y, z, u) = 0$ و برای $F(x, y, z, u, v) = 0$ نتایج مشابه بدست آورید. حالت کلی چیست؟

تمرین ۳

به فرض آن‌که $f(x, y) = \arctan(x + y)$، با استفاده از روش‌های سری، مقدار مشتق جزئی $f_{112}(0, 0)$ را بیابید.

تمرین ۴

حجم بزرگترین جعبه مکعب مستطیل (با وجوه موازی صفحات مختصات) را که در بیضی‌گون

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

قابل محاط است، پیدا کنید.

تمرین ۵

با استفاده از کامل کردن مجذور برای فرم درجه دوم

$$Q(x,y,z) = [x\ y\ z] \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

نشان دهید:

آ) اگر

$$A > ۰, \quad \det \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} > ۰, \quad \det \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{bmatrix} > ۰$$

آنگاه ماتریس معین مثبت است.

ب) اگر

$$A < ۰, \quad \det \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} > ۰, \quad \det \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{bmatrix} < ۰$$

آنگاه ماتریس معین منفی است.

ج) اگر

$$\det \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{bmatrix} \neq ۰$$

ولی هیچ یک از شرایط (الف) و (ب) برقرار نباشد، آنگاه ماتریس نامعین است.

تمرین ۶

نقاط بحرانی تابع $z = g(x,y)$ صادق در معادله

$$e^{۲zx-x^۲} - ۳e^{۲zy+y^۲} = ۲,$$

را پیدا کنید. نوع این نقاط بحرانی را مشخص کنید.

تمرین ۷

مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x,y) = xy(۱-x-y)$ روی مثلث به راس‌های $(۰,۰)$، $(۱,۰)$ و $(۰,۱)$ را بیابید.

تمرین ۸

مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x,y) = xz + yz$ روی گوی $x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۱$ را بیابید.

تمرین ۹

با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، بیشترین و کمترین فواصل نقطه $(۲, ۱, -۲)$ تا کره به معادله

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱,$$

را بیابید. با استدلال هندسی جواب را به دست آورید.