

تمرین‌های سری پنجم

مدرس: علیشاهی و شریفی تبار

تمرین ۱

فرض کنید

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

مشق‌ها را در $(0, 0)$ محاسبه نمایید. توجه کنید که $F_{12}(0, 0) = -2$ و $F_{21}(0, 0) = 2$. آیا این نتیجه قضیه ۱ (قضیه جا به جایی مشتق‌ها) را نقض می‌کند؟ دلیلش را توضیح دهید.

تمرین ۲

نشان دهید که $w = e^{3x+4y} \sin(\Delta z)$ در تمام \mathbb{R}^3 توافقی است، یعنی همه جا در معادله لاپلاس سه بعدی

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

صدق می‌کند.

تمرین ۳

اگر $x = t \sin s$ و $y = t \cos s$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}$ را بیابید.

تمرین ۴

فرض کنید $u(x, y)$ و $v(x, y)$ مشتق‌های جزئی دوم پیوسته داشته باشند و در معادلات کشی-ریمان

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

تمرین های سری پنجم

صدق کنند. همچنین $f(u, v)$ یک تابع توافقی از u و v باشد، یعنی در معادله لاپلاس

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0,$$

صدق کند. نشان دهید که $f(u(x, y), v(x, y))$ یک تابع توافقی از x و y است.

تمرین ۵

اگر $f(x, y)$ به طور مثبت همگن از درجه k باشد، یعنی

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y),$$

برای هر $\lambda > 0$ و دارای مشتق های جزئی پیوسته مرتبه دو باشد، نشان دهید که

$$x^2 f_{11}(x, y) + 2xy f_{12}(x, y) + y^2 f_{22}(x, y) = k(k-1)f(x, y).$$

تمرین ۶

با استفاده از خطی سازی مناسب، مقدار تقریبی تابع

$$f(x, y, z) = \sqrt{x + 2y + 3z}$$

در نقطه $(1/8, 1/8, 1/8)$ را حساب کنید.

تمرین ۷

ماتریس ژاکوبین تبدیل $\mathbf{f}(\rho, \phi, \theta) = (x, y, z)$ را در صورتی بیابید که

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi,$$

در این جا (ρ, ϕ, θ) مختصات کروی در فضای xyz اند.

تمرین ۸

فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(آ) $\nabla f(0, 0)$ را محاسبه کنید.

(ب) با استفاده از تعریف مشتق جهتی، $\nabla_{\mathbf{u}} f(0, 0)$ را که در آن $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}}$ حساب کنید.

تمرین های سری پنجم

ج) آیا $f(x, y)$ در $(0, 0)$ مشتق پذیر است؟ چرا؟

تمرین ۹

نشان دهید که معادلات

$$\begin{cases} xy^2 + zu + v^2 = 3, \\ x^2z + 2y - uv = 2, \\ xu + yu - xyz = 1, \end{cases}$$

را می توان نسبت به x, y, z و به عنوان تابعی u و v در مجاورت $P = (1, 1, 1, 1, 1)$ که $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$ حل کرد و $\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v$ را در $(u, v) = (1, 1)$ یافت.

تمرین ۱۰

چند جمله ای تیلور از درجه ۴ برای تابع $f(x, y) = \cos(x + \sin y)$ در مجاورت $(0, 0)$ بدست آورید.