

## تمرین‌های سری سوم

مدرس: علیشاهی و شریفی تبار

## تمرین ۱

در هر یک از قسمت‌های زیر، سرعت، تندی و شتاب ذره با موضع  $\mathbf{r}(t)$  در زمان  $t$  را بیابید. مسیر ذره را توصیف کنید.

$$\text{آ) } \mathbf{r} = t^2 \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

$$\text{ب) } \mathbf{r} = t^2 \mathbf{i} - t^2 \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\text{ج) } \mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + ct \mathbf{k}$$

$$\text{د) } \mathbf{r} = a \cos \omega t \mathbf{i} + b \mathbf{j} + a \sin \omega t \mathbf{k}$$

$$\text{ه) } \mathbf{r} = ae^{t} \mathbf{i} + be^{t} \mathbf{j} + ce^{t} \mathbf{k}$$

$$\text{و) } \mathbf{r} = at \cos \omega t \mathbf{i} + at \sin \omega t \mathbf{j} + b \ln t \mathbf{k}$$

$$\text{ز) } \mathbf{r} = a \cos t \sin t \mathbf{i} + a \sin^2 t \mathbf{j} + a \cos t \mathbf{k}$$

## تمرین ۲

نقطه  $P$  در امتداد منحنی فصل مشترک استوانه  $z = x^2$  و صفحه  $x + y = 2$  در جهت افزایش  $y$  با تندی ثابت  $v = 3$  حرکت می‌کند. سرعت  $P$  را وقتی در  $(1, 1, 1)$  است، بیابید.

## تمرین ۳

نشان دهید که اگر حاصل ضرب نقطه‌ای سرعت و شتاب یک ذره متحرک مثبت (یا منفی) باشد، تندی ذره صعودی (یا نزولی) است.

تمرین‌های سری سوم

تمرین ۴

اگر بردارهای موضع و سرعت یک ذره متحرک همواره بر هم عمود باشند، نشان دهید که مسیر ذره روی یک کره قرار دارد.

تمرین ۵

عبارت زیر را بسط داده و ساده کنید:

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{u} \times \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \right) \right).$$

تمرین ۶

صفحه  $x + y + z = 1$  کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  را در دایره  $C$  قطع می‌کند. مرکز  $\mathbf{r}_0$  و شعاع  $r$  از  $C$  را بیابید. همچنین دو بردار یکه عمود بر هم  $\hat{\mathbf{v}}_1$  و  $\hat{\mathbf{v}}_2$  موازی صفحه  $C$  را پیدا کنید. ( راهنمایی: به طور مشخص، نشان دهید که  $\hat{\mathbf{v}}_1 = (\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{2}$  یک چنین برداری است؛ سپس بردار دوم را عمود بر  $\hat{\mathbf{v}}_1$  پیدا کنید.) با استفاده از نتایج خود، یک پارامتری سازی برای  $C$  بسازید.

تمرین ۷

در هر قسمت، منحنی داده شده را در همان جهت و بر حسب طول قوسی که از نقطه نظیر  $t = 0$  سنجیده می‌شود، مجدداً پارامتریزه کنید.

(آ)  $\mathbf{r} = At\mathbf{i} + Bt\mathbf{j} + Ctk, \quad (A^2 + B^2 + C^2 > 0)$

(ب)  $\mathbf{r} = e^t\mathbf{i} + \sqrt{2}t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$

(ج)  $\mathbf{r} = a \cos^3 t\mathbf{i} + a \sin^3 t\mathbf{j} + b \cos 2t\mathbf{k}, \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{4})$

(د)  $\mathbf{r} = 3t \cos t\mathbf{i} + 3t \sin t\mathbf{j} + 2\sqrt{2}t^{3/2}\mathbf{k}$

تمرین ۸

اگر منحنی  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  دارای سرعت صفر نشو پیوسته  $\mathbf{v}(t)$  بر بازه  $[a, b]$  و  $t_0$  نقطه‌ای در  $[a, b]$  باشد، نشان دهید که تابع

$$s = g(t) = \int_{t_0}^t |\mathbf{v}(u)| du,$$

یک تابع صعودی بر  $[a, b]$  است؛ و در نتیجه دارای معکوس است:

$$t = g^{-1}(s) \Leftrightarrow s = g(t).$$

### تمرین‌های سری سوم

بدین ترتیب نشان دهید که منحنی را می‌توان بر حسب طول قوس سنجیده شده از  $t$  پارامتریزه کرد.

#### تمرین ۹

مماس، قائم، قائم دوم یکه و نیز انحنا و تاب منحنی

$$\mathbf{r} = \sin t \cos t \mathbf{i} + \sin^2 t \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k},$$

را در نقاط (i)  $t = 0$  و (ii)  $t = \pi/4$  بیابید.

#### تمرین ۱۰

نشان دهید که انحنای نمودار قطبی مسطح  $r = f(\theta)$  در نقطه کلی  $\theta$  مساوی است با

$$\kappa(\theta) = \frac{|2(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2 - f''(\theta)f(\theta)|}{[(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2]^{3/2}}.$$

#### تمرین ۱۱

گسترده مارپیچ مستدیر

$$\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + b t \mathbf{k},$$

را بیابید.