

## تمرین‌های سری دوازدهم

مدرس: علیشاهی و شریفی تبار

## تمرین ۱

$\text{div F}$  و  $\text{curl F}$  میدان‌های برداری داده شده را حساب کنید.

$$\text{آ) } \mathbf{F} = f(z) \mathbf{i} - f(z) \mathbf{j}$$

$$\text{ب) } \mathbf{F} = xy^2 \mathbf{i} - yz^2 \mathbf{j} + zx^2 \mathbf{k}$$

$$\text{ج) } \mathbf{F}(r, \theta) = r \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

$$\text{د) } \mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

## تمرین ۲

فرض کنید  $\mathbf{F}$  یک میدان برداری ۲ بعدی هموار باشد. اگر  $C_\varepsilon$  دایره به شعاع  $\varepsilon$  و مرکز مبدا باشد و  $\hat{\mathbf{N}}$  قائم یکه رو به خارج به  $C_\varepsilon$  باشد، نشان دهید که

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \text{div } \mathbf{F}(0, 0).$$

## تمرین ۳

فرض کنید  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$  و  $\mathbf{c}$  یک بردار ثابت باشد. نشان دهید که

$$\nabla(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{c}, \quad \nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{c}, \quad \nabla \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 0.$$

تمرین‌های سری دوازدهم

تمرین ۴

اگر  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  و  $\mathbf{F}$  هموار باشند، نشان دهید که

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{r}) = \mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{r} + \nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{F}).$$

به‌خصوص، هرگاه  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$  و  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ ، آن‌گاه  $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{r}) = \mathbf{F} + \nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{r})$ .

تمرین ۵

اگر  $\phi$  و  $\psi$  تابع‌هایی توافقی باشند، نشان دهید که  $\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi$  سلونوئیدی است.

تمرین ۶

اتحاد  $\nabla(f(\nabla g \times \nabla h)) = \nabla f \cdot (\nabla g \times \nabla h)$  را به ازای میدان‌های اسکالر هموار  $f$ ،  $g$  و  $h$  تحقیق کنید.

تمرین ۷

اگر میدان‌های برداری  $F$  و  $G$  هموار و بقا باشند، نشان دهید که  $F \times G$  سلونوئیدی است. برای  $F \times G$  یک پتانسیل برداری بیابید.

تمرین ۸

نشان دهید که  $F = xe^{yz}\mathbf{i} + ye^{xz}\mathbf{j} - e^{xz}\mathbf{k}$  یک میدان برداری سلونوئیدی است و برای آن یک پتانسیل برداری بیابید.

تمرین ۹

انتگرال

$$\oint_C (x^2 - xy)dx + (xy - y^2)dy,$$

را در جهت عقربه‌های ساعت حول مثلث به رئوس  $(0, 0)$ ،  $(1, 1)$  و  $(2, 0)$  حساب کنید.

تمرین ۱۰

انتگرال

$$\oint_C x^y dx - xy^y dy,$$

را در صورتی حساب کنید که  $C$  مرز ناحیه  $0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}$  در جهت عقربه‌های ساعت باشد.