

## تمرین‌های سری دهم

مدرس: علیشاهی و شریفی تبار

## تمرین ۱

معین کنید که میدان برداری داده شده پایستار (بقا) هست یا خیر، و در صورت پایستار بودن یک تابع پتانسیل برای آن بیابید.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y \mathbf{i} + x \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k} \quad (\text{آ})$$

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x \mathbf{i} - y \mathbf{j}}{x^2 + y^2} \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x \mathbf{i} + y \mathbf{j}}{x^2 + y^2} \quad (\text{ج})$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{x^2 + y^2 + z^2} (xz \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}) \quad (\text{د})$$

## تمرین ۲

(آ) نشان دهید که گرادیان یک تابع بیان شده در مختصات قطبی در صفحه به صورت

$$\nabla \phi(r, \theta) = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}},$$

است.

(ب) با استفاده از قسمت (آ) نشان دهید که شرط لازم برای پایستار بودن میدان برداری

$$\mathbf{F}(r, \theta) = F_r(r, \theta) \hat{\mathbf{r}} + F_\theta(r, \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}},$$

آن است که

$$\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial F_\theta}{\partial r} = F_\theta.$$

تمرین‌های سری دهم

تمرین ۳

میدان برداری

$$\mathbf{F} = r^\alpha \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \alpha r^\beta \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}},$$

به ازای چه مقادیری از ثابت‌های  $\alpha$  و  $\beta$  پایستار است؟ اگر  $\alpha$  و  $\beta$  این مقادیر را داشته باشند، برای  $\mathbf{F}$  یک پتانسیل بیابید.

تمرین ۴

انتگرال  $\int_C \sqrt{1 + 4x^2 z^2} ds$  را که در آن  $C$  منحنی فصل مشترک سطوح  $1 = x^2 + z^2$  و  $y = x^2$  است، بیابید.

تمرین ۵

انتگرال  $\int_C z ds$  را در امتداد بخشی از منحنی

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y = 1,$$

که  $z \geq 0$ ، بیابید.

تمرین ۶

انتگرال خط مولفه مماسی میدان برداری داده شده را در امتداد منحنی ذکر شده حساب کنید.

ا)  $\mathbf{F}(x, y) = \cos x \mathbf{i} - y \mathbf{j}$  در امتداد  $y = \sin x$  از  $(0, 0)$  تا  $(\pi, 0)$ .

ب)  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} - (x + y)\mathbf{k}$  در امتداد مسیر چندضلعی از  $(0, 0, 0)$  تا  $(1, 0, 0)$  تا  $(1, 1, 0)$  تا  $(1, 1, 1)$ .

تمرین ۷

انتگرال  $\oint_C x^2 y^2 dx + x^3 y dy$  را حول مربع به راس‌های  $(0, 0)$ ،  $(1, 0)$ ،  $(1, 1)$  و  $(0, 1)$  خلاف جهت عقربه‌های ساعت حساب کنید.

تمرین ۸

مقادیر  $A$  و  $B$  را چنان تعیین کنید که میدان برداری

$$\mathbf{F} = Ax \ln z \mathbf{i} + By^2 z \mathbf{j} + \left( \frac{x^2}{z} + y^3 \right) \mathbf{k}$$

تمرین‌های سری دهم

پایستار باشد. اگر  $C$  خم مستقیم از  $(1, 1, 1)$  تا  $(2, 1, 2)$  باشد،

$$\int_C 2x \ln z dx + 2y^2 z dy + y^3 dz,$$

را پیدا کنید.