

۱. فرض کنید a_n دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشند که به l همگراست. نشان دهید دنباله‌ی $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ نیز به l همگراست.
 ۲. همگرایی دنباله‌های زیر را ثابت کنید.

الف:

$$a_1 = 1 \quad a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}} \quad n > 1$$

ب:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln n$$

راهنمایی: نشان دهید این دنباله نزولی و کران‌دار است.
 ج: ثابت کنید به هر عدد حقیقی دنباله‌ای از اعداد گویا همگراست.
 ۳. در مورد همگرایی یا واگرایی دنباله‌های زیر بحث کنید و در صورت همگرا بودن حد را مشخص کنید.

الف: فرض کنید $p(x)$ یک چند جمله‌ای، $c > 1$ باشد و

$$a_n = \frac{p(n)}{c^n}$$

ب: فرض کنید $\alpha > 0$ باشد

$$b_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}$$

پ: فرض کنید θ عددی حقیقی باشد

$$c_n = n\theta - [n\theta]$$

ت:

$$d_n = \frac{n!}{n^n}$$

ث

$$e_n = \sqrt[n]{n}$$

۴. در مورد همگرایی سری‌های زیر بحث کنید

الف:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad p > 0$$

ب:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad p > 0$$

پ:

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln(\ln n))^p} \quad p > 0$$

ت:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^p}{c^n} \quad c, p > 0$$

ج:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n} \quad p > 0$$

۴. شعاع همگرایی سری‌های توانی زیر را تعیین کنید.

الف:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p} \quad p > 0$$

ب:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^n \sin n}{n(\ln n)^p} \quad p > 0$$

پ:

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

۵. مجموع سری‌های زیر را حساب کنید

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^m x^k \quad |x| < 1 \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \sin kx \quad \sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos kx$$

۶. ثابت کنید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} = 1$$