



به نام خدا

آزمون پایان ترم  
درس ریاضی عمومی ۱  
۲۳ تیر ۹۹

دانشجویان محترم درس ریاضی عمومی یک، لطفاً قبل از پاسخ‌گویی به سؤالات که در صفحه‌ی بعد آمده است، به موارد زیر توجه فرمایید:

۱- این آزمون شامل ۱۲ سؤال بوده و ۶ نمره دارد و پاسخ خود را تنها باید در سامانه‌ی درس افزار شریف CW بارگذاری نموده و از ارسال پاسخ به ایمیل دستیاران آموزشی یا ایمیل اساتید محترم درس بپرهیزید.

۲- پاسخ حتماً باید در قالب یک فایل PDF با کیفیت مناسب و خوانا بارگذاری شده و نام فایل حتماً باید شماره دانشجویی شخص نگارنده باشد.

۳- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۸ صبح روز ۲۵ تیر است و امکان بارگذاری پاسخ با تاخیر وجود ندارد.

۴- در پاسخ‌دهی به آزمون می‌توانید از کتاب آدامز و ماشین حساب ساده (فاقد برنامه‌نویسی) استفاده نموده و حتماً باید شخصاً به سؤالات پاسخ داده و استفاده از هیچ ابزار دیگری مجاز نیست.

با آرزوی موفقیت

**سوال ۱**  $Z_4, Z_3, Z_2, Z_1$  نقاطی متمایز در صفحه مختلط هستند. اگر علامت «بار» به معنی مزدوج مختلط باشد، نشان دهید:

الف)  $Z_3, Z_2, Z_1$  روی یک خط قرار دارند اگر و تنها اگر  $\frac{Z_2 - Z_1}{Z_3 - Z_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_3 - Z_1}$ .

ب) خط گذرا از  $Z_2, Z_1$  بر خط گذرا از  $Z_4, Z_3$  عمود است اگر و تنها اگر  $\frac{Z_2 - Z_1}{Z_4 - Z_1} + \frac{Z_2 - Z_3}{Z_4 - Z_3} = 0$ .

**سوال ۲** تابع  $f: [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $f(x) = 2x - \ln x - 4$  را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید  $f$  دقیقاً یک ریشه دارد.

ب) نشان دهید تابع  $x + f(x)$  در هیچ فاصله‌ای حول ریشه‌ی  $f$  انقباضی نیست.

ج) عدد  $\lambda$  را طوری بدست آورید که تابع  $g(x) = x + \lambda f(x)$  انقباضی شود و نشان دهید  $g$  فاصله‌ی  $[2, 3]$  را به توی خودش

می‌برد. ( $g$  را انقباضی گوئیم هرگاه  $0 \leq k < 1$  یافت شود که برای هر  $x, y$  داشته باشیم  $|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$ ).

د) به کمک تابع  $g$  ریشه‌ی  $f$  را با تقریب  $10^{-3}$  محاسبه کنید.

**سوال ۳** یک آونگ (پاندول) به طول  $20\text{cm}$  را در نظر بگیرید. با استفاده از مفاهیم و ابزارهای مشتق محاسبه کنید طول آونگ

چقدر افزایش یابد تا دوره‌ی تناوب آونگ حداقل  $0.5\%$  ثانیه افزایش یابد. (یادآوری:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$  که در آن  $T$  دوره‌ی

تناوب و  $L$  طول آونگ و  $g$  شتاب گرانش است)

**سوال ۴** از رودخانه‌ای به عرض  $a$  کانالی عمودی به عرض  $b$  ساخته شده است. بیشترین طول قایقی که بتواند از رودخانه وارد کانال

شود چقدر است؟ (قایق به گونه‌ای است که می‌توان از عرض آن صرف نظر کرد)

**سوال ۵** برای هر  $a > 0$  مطلوبست محاسبه‌ی حد روبه‌رو:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$ .

**سوال ۶** همه‌ی مشتقات تابع  $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^2}}$  را در مبدأ محاسبه نموده و نمودار تابع  $f$  را روی اعداد حقیقی رسم کنید.

**سوال ۷** با استفاده از یک رابطه تحویل انتگرال نامعین روبه‌رو را محاسبه کنید:  $\int_0^1 (1 - x^2)^{-\frac{5}{2}} dx$ .

**سوال ۸** برای هر تابع پیوسته‌ی  $f$  روی  $[0, \pi]$  نشان دهید:  $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{4} \int_0^\pi f(\sin x) dx$ .

**سوال ۹** می‌خواهیم برای تقریب  $\int_0^x e^{-t} dt$  از تابع  $\arctan x$  روی بازه‌ی  $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$  استفاده کنیم. حداکثر خطا را تخمین بزنید.

**سوال ۱۰** به کمک تقریب سری تیلور مقدار  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$  را با تقریب  $10^{-3}$  محاسبه کنید.

**سوال ۱۱** انتگرال ناسره  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$  را محاسبه کنید. (راهنمایی: می‌توانید از سری‌های توانی استفاده کنید)

**سوال ۱۲** سری توانی  $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$  را بر حسب توابع مقدماتی محاسبه کنید. شعاع همگرایی این سری چیست؟