

۱. فرض کنید  $f(0) = 0$  و اگر  $f(z) = \frac{z^0}{|z|^4}$ ،  $z \neq 0$ . ثابت کنید تابع  $f$  در مبدأ مختصات مشتق پذیر نیست، اما روابط کوشی-ریمان در مبدأ مختصات برای تابع  $f$  برقرارند.

۲. ثابت کنید تابع  $f$  با ضابطه  $f(z) = \sqrt[n]{re^{i\frac{\theta}{n}}}$  روی

$$\{(r, \theta) : r > 0, 0 < \theta < \pi\}$$

تحلیلی است  $(n \in \mathbb{N})$ .

۳. ثابت کنید تابع  $u$  با ضابطه

$$u(x, y) = -2 - x^2 + 2xy^2 + \sinh x \sin y$$

همساز است و مزدوج های همساز آن را بیابید.

۴. بزرگترین میدانی را که تابع  $f$  با ضابطه  $f(z) = z^z$  روی آن تحلیلی است تعیین کنید و همچنین مشتق این تابع را به دست بیاورید. همین مسئله را برای  $g(z) = \sin(\operatorname{Log} z^2)$  حل کنید.

۵. مقدار اصلی  $(1+i)^i$ ،  $(1+i)^{1-i}$ ،  $2^{2+2i}$  و  $(2i)^{\frac{1}{2}}$  را به دست آورید.

۶. ثابت کنید  $i \sin z = \sinh(iz)$  و  $\cos z = \cosh(iz)$ .

۷. جواب های معادله  $\cos z = ia$ ، به طوریکه  $a \in \mathbb{R}$  را به دست آورید.

۸. اگر  $\operatorname{Log} z$  شاخه اصلی لگاریتم باشد  $(-\pi < \arg z < \pi)$ ، بررسی کنید که تابع  $\operatorname{Log}(1+z^2)$  روی نواحی زیر تحلیلی است یا خیر؟

الف:

$$\{z \mid \operatorname{Re} z = 0, |\operatorname{Im} z| \geq 1\}$$

ب:

$$\{z \mid \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

ج:

$$\{z \mid \operatorname{Re} z = 0, |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$$

د:

$$\{z \mid z = x + iy, y = 0, x \leq 0\}$$

۹. آیا تابع  $v = -\sin x \sinh y$  می تواند قسمت موهومی یک تابع تحلیلی نظیر  $f$  باشد؟ اگر پاسخ مثبت است، تابع هارمونیک  $u = \operatorname{Re} f(z)$  را به دست آورید.