

۱. ثابت کنید هر یک از توابع زیر یک جواب معادله لاپلاس است.

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad u(x, y) = e^x \sin y, \quad u(x, y) = e^{2y} \cos 2x.$$

۲. جواب عمومی هر یک از معادلات دیفرانسیل پاره ای زیر را به دست آورید.

الف:

$$u_{yy} + u = x^2 \sin xy$$

ب:

$$u_{xy} + u_x = xyu_x^2$$

۳. در هر مورد، ناحیه ای را که معادله در آن از نوع هذلولوی، سهموی و یا بیضوی است معین کنید.

الف:

$$u_{xx} + y^2 u_{yy} + u_y + xu = y^2$$

ب:

$$u_{xx} + xyu_{xy} + u_{yy} + u = x^2$$

ج:

$$e^x u_{xx} + u_{xy} + e^y u_{yy} = x + y$$

۴. منحنی های مشخصه را برای هر یک از معادله های زیر بیابید و سپس معادله را به شکل کانونیک تبدیل کنید.

الف:

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 3u_{yy} + 4u_x + 5u_y + u = e^x$$

ب:

$$2u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{yy} + 3u = xy$$

۵. جواب مسئله زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} 2u_{xx} + 1 \cdot u_{xy} + 3u_{yy} = 2x - 2y \\ u(x, \cdot) = x \\ u_y(x, \cdot) = \sin x \end{cases}$$

۶. مطلوب است درجه حرارت  $u(x, t)$  میله ای به طول  $\pi$  که دو طرف آن، در مخلوط آب و یخ قرار گرفته و دمای اولیه آن  $u(x, \cdot) = \sin x$  است و در معادله  $u_t - u_{xx} = 0$  صدق می کند.

۷. مطلوب است جواب معادله لاپلاس

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \quad y \geq 0 \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \\ u(x, 0) = \sin 2x(1 - 2 \cos 2x) \end{cases}$$

که در آن  $u(x, y)$  تابعی کراندار است.