

۱. ثابت کنید سری مثلثاتی $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ در سراسر \mathbb{R} همگراست، ولی سری فوریه هیچ تابع قطعه به قطعه پیوسته با دوره تناوب 2π نیست.

۲.

الف: بسط های سینوسی و کسینوسی تابع $f(x) = \sin x$ را روی $(0, \pi)$ به دست آورید.

ب: مطلوب است محاسبه سری فوریه تابع $f(x) = \sin x$ به شکل کلاسیک و مختلط.

ج: با استفاده از قسمت الف مقدار سری $S = \frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \frac{1}{5^2 \times 7^2} + \dots$ را به دست آورید.

۳. در سری فوریه سینوسی $f(x) = [x] + 1$ ، $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ، ضریب $\sin 5x$ را به دست آورید.

۴. مقادیر ویژه و توابع ویژه مسئله اشتورم-لیوویل منظم زیر را روی $[1, 2]$ بیابید. سپس سری فوریه تعمیم یافته به دست آمده را برای توابع $f(x) = 1$ و $g(x) = x$ به دست آورید.

$$\begin{cases} (x^2 y')' + \lambda y = 0 \\ y(1) = y(2) = 0 \end{cases}$$

۵. در صورتی که سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x) = x^2$ ، $-L \leq x \leq L$ ، به صورت $\frac{1}{4} L^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L^2}{(n\pi)^2} (-1)^n \cos \frac{n\pi x}{L}$ باشد، آنگاه سری فوریه مثلثاتی تابع $g(x) = \frac{x}{4} \left(\frac{x^2}{L^2} - 1 \right)$ را به دست آورید.