

۱.

الف: مزدوج همساز تابع همساز  $u(r, \theta) = \theta + r^2 \cos 2\theta$  را که در نیم صفحه بالایی  $\{(r, \theta) : r > 0, 0 < \theta < \pi\}$  تعریف شده است، به دست آورید.

ب: یک تابع  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  معرفی کنید که روی هذلولی  $xy = 1$  مشتق پذیر و در سایر نقاط مشتق پذیر نباشد. مشتق  $f(z)$  را نیز بیابید.

۲.

الف: تصویر ناحیه  $\{z \mid 0 < \|z\| < \infty, 0 < \text{Arg} z < \frac{\pi}{4}\}$  را تحت نگاشت  $f(z) = e^{iz}$  بیابید.

ب: بررسی کنید که این نگاشت در چه نقاطی همردیس و در چه نقاطی یک به یک است.

۳. میدان  $\{x > 0, x^2 + (y-2)^2 < 1\}$  را به صورت یک به یک و پوشا بر دیسک واحد بنگارید.

۴. مقدار انتگرال های زیر را حساب کنید.

الف:

$$I_1 = \oint_{|z|=1} y^{(1)} dx$$

ب:

$$I_2 = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin \frac{1}{z}}{1+z} dz$$

۵.

الف: بسط لوران تابع  $f(z) = \frac{2z^2 - 4z + 2}{z^2 - 2z^2 + 2z}$  را در ناحیه  $1 < |z| < 2$  بیابید.

ب: بسط لوران تابع  $g(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$  را در ناحیه  $|z| < 2$  بیابید.

۶. از تابع  $f(z) = e^{-z^2}$  در امتداد مستطیلی به رئوس  $a, -a, -a + ib$  و  $a + ib$  در جهت مثلثاتی انتگرال گرفته و سپس با استفاده از فرمول  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  نشان دهید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$$

۷. انتگرال حقیقی زیر را حساب کنید.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x^2 - 2x + 2)}$$