



سوال ۱ . تبدیل لاپلاس هر کدام از توابع زیر را به روش مستقیم به دست آورید.

الف) $p(t) = \sinh(bt)$

ب) $p(t) = e^{at} \sinh(bt)$

ج) $p(t) = t^n e^{at}$

د)
$$p(t) = \begin{cases} \sin(3t) & 0 \leq t \leq \pi \\ 3 & t \geq \pi \end{cases}$$

سوال ۲ . توابع زیر را به صورت توابع پله ای نوشته و تبدیل لاپلاس آن ها را به دست آورید.

الف)
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ (t-2)^2 & t \geq 2 \end{cases}$$

ب)
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < \pi \\ t - \pi & \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & t \geq 2\pi \end{cases}$$

سوال ۳ . لاپلاس وارون هر کدام از توابع زیر را به دست آورید.

$$F(s) = \frac{2}{s^2 + 3s - 4} \quad (\text{الف})$$

$$F(s) = \frac{2s + 2}{s^2 + 2s + 5} \quad (\text{ب})$$

$$F(s) = \frac{1 - 2s}{s^2 + 4s + 5} \quad (\text{پ})$$

$$F(s) = \frac{3!}{(s - 2)^4} \quad (\text{ج})$$

$$F(s) = \frac{2(s - 1)e^{-2s}}{s^2 - 2s + 2} \quad (\text{د})$$

سوال ۴ . معادلات دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$y'' + \omega^2 y = \cos(2t) \quad , \omega^2 \neq 4 \quad y(0) = 1, y'(0) = 0 \quad (\text{الف})$$

$$y'' + y = g(t) \quad y(0) = 0, y'(0) = 1; \quad g(t) = \begin{cases} t/2 & 0 \leq t < 6 \\ 3 & t \geq 6 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$y'' + 4y = u_{\pi}(t) - u_{3\pi}(t) \quad y(0) = 0, y'(0) = 0 \quad (\text{ج})$$

$$y^{(4)} + 5y'' + 4y = 1 - u_{\pi}(t) \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 0 \quad (\text{د})$$

سوال ۵ . فرض کنید f در $t \geq 0$ تابعی متناوب باشد (وجود دارد عددی مانند T به طوری که به ازای $t \geq 0$

$$f(t + T) = f(t) \quad \text{نشان دهید:}$$

$$\mathcal{L}f(t) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{(1 - e^{sT})}$$

تبدیل لاپلاس تابع زیر را با استفاده از قسمت قبل به دست آورید.

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t & 1 < t < 2 \\ f(t - 2) & t \geq 2 \end{cases}$$

سوال ۶ . معادلات زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کرده و نمودار آن را رسم نمایید.

$$y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi) \quad y(0) = 0, y'(0) = 0 \quad \text{الف}$$

$$y'' + y = u_{\pi/2}(t) + 3\delta(t - 3\pi/2) - u_{2\pi}(t) \quad y(0) = 0, y'(0) = 0 \quad \text{ب}$$

$$y'' + y = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \delta(t - k\pi/2) \quad y(0) = 0, y'(0) = 0 \quad \text{ج}$$

سوال ۷ . جواب معادلات زیر را به صورت انتگرال کانولوشن به دست آورید.

$$4y'' + 4y' + 17y = g(t) \quad y(0) = 0, y'(0) = 0 \quad \text{الف}$$

$$y^4 - y = g(t) \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 0 \quad \text{ب}$$

سوال ۸ . معادلات انتگرالی زیر را با روش تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$y(t) = \int_0^t (t - \tau)y(\tau)d\tau = \sin(2t) \quad \text{الف}$$

$$y'(t) = \int_0^t (t - \tau)y(\tau)d\tau = \delta_1'(t) \quad y(0) = 0 \quad \text{ب}$$

$$\delta_1(t) = \begin{cases} 1/2\epsilon & -\epsilon < t - 1 < \epsilon \\ 0 & |t - 1| > \epsilon \end{cases} \quad \text{جایی که}$$