تمرینات سری ششم (نیمسال دوم ۹۸-۹۷) **معادلات دیفرانسیل**

سوال ۱ . در هر یک از مسایل زیر پایداری و نوع آن را مشخص کنید. صفحه فاز هر یک را رسم کرده و چند مدار در نزدیکی نقطه بحرانی سیستم بکشید.

الف)
$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} x$$

ب)
$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} x$$

ج)
$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix} x$$

د)
$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

سوال ۲ . مساله زیر را در نظر بگیرید.نشان دهید نقطه $(۰,۰)$ پایدار است.(نوع پایداری را ذکر کنید.)

$$x' = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} x$$

حال سیستم را با یک نوسان کوچک به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$x' = \begin{bmatrix} \epsilon & ۱ \\ -۱ & \epsilon \end{bmatrix} x$$

جایی که $|\epsilon|$ بسیار کوچک باشد. در مورد پایداری نقطه $(۰,۰)$ و نوع آن بحث کنید.

سوال ۳ . مدار وابسته به جواب که در شرایط اولیه داده شده صدق می کند را به دست آورید و جهت حرکت افزایش t را به دست آورید. $x(۰) = ۴, y(۰) = ۲ \qquad dx/dt = -x\,, \quad dy/dt = ۲y$

سوال ۴ . برای هرکدام از موارد زیر نشان دهید سیستم، موضعی خطی(تقریبا خطی) است و سیستم خطی متناظر را به دست آورید.سپس برای نقطه بحرانی $(۰, ۰)$ پایداری و نوع آن را بررسی کنید.

الف) $dx/dt = x - y^۲\,, \quad dy/dt = x - ۲y + x^۲$

ب) $dx/dt = -x + y + ۲xy\,, \quad dy/dt = -۴x - y + x^۲ - y^۲$

سوال ۵ . در هر یک از مسایل زیر به ازای نقاط اولیه متفاوت رفتار سیستم را بررسی کنید. (سعی کنید سیستم را به صورت $H(x, y) = c$ در آورده و از آن استفاده کنید.) سپس با استفاده از قسمت قبل پایداری در نقطه بحرانی را مشخص کنید.

الف) $dx/dt = ۲y\,, \quad dy/dt = -۸x$

ب) $dx/dt = y\,, \quad dy/dt = ۲x + y$

سوال ۶ . هر کدام از سیستم های زیر را که یک مدل جمعیتی را توصیف می کند در نظر بگیرید.

الف) $dx/dt = x(۱.۵ - ۰.۵x - y)\,, \quad dy/dt = y(۰.۷۵ - y - ۰.۱۲۵x)$

ب) $dx/dt = x(۱.۱۲۵ - x - ۰.۵y)\,, \quad dy/dt = y(-۱ + x)$

میدان برداری مربوط به هرکدام از سیستم ها را بکشید.نقاط بحرانی برای هرکدام را پیدا کرده و سیستم خطی مربوط به آن را به دست آورید و با به دست آوردن مقدار ویژه و بردار ویژه های آن پایداری و نوع آن را بررسی کنید. چند مدار در نزدیکی هر یک از نقاط بحرانی رسم نمایید و رفتار دو گونه را هنگامی که $t \to \infty$ بررسی نمایید.

سوال ۷ . در هرکدام از مسایل زیر پایداری و نوع آن را با استفاده از تابع لیاپانوف مشخص کنید. (راهنمایی: می توانید از توابعی به فرم $V = cx^۲ + dy^۲$ استفاده کنید.)

الف) $dx/dt = -\frac{۱}{۲}x^۳ + ۲xy^۲\,, \quad dy/dt = -y^۳$

ب) $dx/dt = x^۳ - y^۳\,, \quad dy/dt = ۲xy^۲ + ۴x^۲y + ۲y^۳$