تمرینات سری چهارم (نیمسال دوم ۹۸-۹۷) **معادلات دیفرانسیل**

سوال ۱ . به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) اگر $y_۱$ و $y_۲$ جواب های اساسی معادله $t^۲y'' - ۲y' + (۳ + t)y = ۰$ باشند و اگر $W(y_۱, y_۲)(۲) = ۳$ باشد ، آنگاه $W(y_۱, y_۲)(۴)$ را حساب کنید.

ب) اگر $p(t) > ۰$ و مشتق پذیر باشد ، آنگاه نشان دهید رونسکین جوابهای معادله $(p(t)y')' + q(t)y = ۰$ برابر با $W(t) = c/p(t)$ خواهد بود.

ج) معادله $y'' + p(t)y' + q(t)y = ۰$ را در نظر بگیرید.فرض کنید $y_۱$ و $y_۲$ جواب های معادله روی بازه I باشد.ثابت کنید کنید اگر $t_۰$ روی I نقطه عطف برای $y_۱$ و $y_۲$ باشد ، آنگاه $y_۱$ و $y_۲$ نمیتوانند جواب اساسی باشند بدون فرض آنکه $p(t_۰), q(t_۰)$ برابر صفر باشد.

سوال ۲ . جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را حساب کنید.

الف) $y'' - y' - ۲y = cosh(۲t)$

ب) $\omega^۲ \neq \omega_۰^۲ \qquad y'' + \omega_۰^۲ y = cos(\omega t)$

ج) $y'' - ۲y' - ۳y = -۳te^{-t}$

د) $۲y'' + ۳y' + y = t^۲ + ۳sin(t)$

ر) $\lambda > ۰,\ \lambda \neq m\pi \quad \forall m = ۱, ..., N \qquad y'' + \lambda^۲ y = \sum_{m=۱}^{N} a_m \sin(m\pi t)$

سوال ۳ . نشان دهید جواب معادله زیر

$$y'' + y = g(t) \qquad y(t_۰) = ۰\ ,\ y'(t_۰) = ۰$$

برابر است با $y(t) = \int_{t_۰}^{t} \sin(t-s)g(s)ds$

$\boxed{\textbf{سوال ۴}}$. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید که همه ضرایب آن روی بازه $I = [۱۰, \infty]$ پیوسته هستند.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

فرض کنید $\phi_۱(t) = ۱$ و $\phi_۲(t) = t$ و $\phi_۳(t) = ln(t)$ سه جواب معادله ناهمگن بالا باشد.

الف) دو جواب مستقل خطی برای مساله همگن $y'' + p(t)y' + q(t)y = ۰$ پیدا کرده و استقلال خطی این جواب را نشان دهید.

ب) جواب عمومی معادله ناهمگن را به دست آورید.

ج) یک جواب خصوصی $\phi_۴(t)$ برای معادله ناهمگن پیدا کرده طوری که $\lim_{t\to\infty} \phi_۴(t) = -\infty$

$\boxed{\textbf{سوال ۵}}$. (کاهش مرتبه) معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

فرض کنید ضرایب معادله بالا پیوسته است و $y_۱$ جواب همگن آن می باشد.

الف) فرض کنید $y = v(t)y_۱(t)$ جواب معادله ناهمگن بالا باشد.نشان دهید v در معادله دیفرانسیل زیر صدق می کند.

$$y_۱(t)v'' + (۲y_۱'(t) + p(t)y_۱(t))v' = g(t)$$

که معادله بالا نسبت به v' یک معادله مرتبه اول است.

ب) با استفاده از قسمت الف معادله زیر را حل کنید.

$$ty'' - (۱+t)y' + y = t^۲e^{۲t} \qquad t > ۰, \quad y_۱(t) = ۱ + t$$