تمرینات سری سوم (نیمسال دوم ۹۸-۹۷) **معادلات دیفرانسیل**

سوال ۱ . معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$(ax+by)dx \ + \ (cx+dy)dy = 0$$

شرایط لازم را طوری پیدا کنید که معادله بالا کامل باشد.سپس جواب عمومی آن را پیدا کنید.

سوال ۲ . **(معادله ریکاتی)** معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$y' + y^2 P_1(x) + yP_2(x) + P_3(x) = 0 \ \ , \ \ P_1(x) \neq 0$$

الف) فرض کنید $y_1(x)$ یک جواب معادله باشد. آنگاه ثابت کنید جواب عمومی معادله به فرم $y = y_1 + \dfrac{1}{z(x)}$ است. جایی که z جواب معادله دیفرانسیل زیر است.

$$z' - z(2y_1P_1(x) \ + \ P_2(x)) = P_1(x)$$

ب) یک جواب معادله زیر را حدس زده و با استفاده از قسمت الف، جواب عمومی معادله را به دست آورید.

$$y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2$$

سوال ۳ . جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

الف) $y'' - 2y' + 5y = 0 \qquad y(\pi/2) = 0 \ \ , y'(\pi/2) = 2$

ب) $6y'' - 5y' + y = 0 \qquad y(0) = 4 \ \ , y'(0) = 0$

ج) $4y'' + 12y' + 9y = 0 \qquad y(0) = 1 \ \ , y'(0) = -4$

سوال ۴ . فرض کنید y_1 و y_2 جواب اساسی معادله دیفرانسیل $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ باشد. حال در نظر بگیرید $y_3 = ay_1 + by_2$ و $y_4 = cy_1 + dy_2$ ، جایی که a, b, c, d ضرایب دلخواه و ثابت هستند. رونسکین y_3 و y_4 را بر حسب رونسکین y_1 و y_2 به دست آورده و مشخص کنید چه مواقعی y_3 و y_4 جواب های اساسی معادله دیفرانسیل داده شده هستند.

سوال ۵ . فرض کنید y_1, y_2 مجموعه اساسی از جواب های معادله $y'' + cos(t)y' + e^t y = 0$ باشد. همچنین فرض کنید که $2y_1 - y_2$ و $y_1 - y_2$ به ترتیب جواب هایی از مسأله های مقدار اولیه

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

باشند.

الف) مقدار رونسکین y_1 و y_2 را در نقطه $t = 0$ را به دست آورید.

ب) مقدار رونسکین y_1 و y_2 را در نقطه دلخواه را به دست آورید.

سوال ۶ . معادله $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ را در نظر بگیرید به طوری که $p(t)$ و $q(t)$ روی R پیوسته هستند.ثابت کنید :

الف) اگر y_1 و y_2 جوابهای معادله دیفرانسیل بالا باشد، آنگاه رونسکین آنها تغییر علامت نمی دهد.

ب) اگر توابع y_1 و y_2 مجموعه اساسی از جواب های معادله باشند آنگاه بین هر دو ریشه متوالی y_1 یک و تنها یک ریشه از y_2 موجود است.

سوال ۷ . فرض کنید تابع $r(t)$ بر بازه $(0, \infty)$ مشتق پیوسته دارد و تابع $y_1(t) = t$ جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y''(t) + \frac{1}{t^2}y'(t) + r(t)y(t) = 0$ بر این بازه است.

الف) یک جواب دیگر معادله را با استفاده از روش کاهش مرتبه پیدا کنید.

ب) دلیل مستقل خطی بودن $y_1(t)$ و $y_2(t)$ را بیان کنید.