



سوال ۱ . بدون حل کردن معادلات زیر ، بازه ای که جواب در آن موجود است را پیدا کنید.

الف) $y' + \tan(t)y = \sin(t) \quad y(\pi) = 0$

ب) $(4 - t^2)y' + 2ty = 3t^2 \quad y(1) = -3$

سوال ۲ . نقاطی از صفحه ty را پیدا کنید که معادله در بازه ای از آن نقطه ، دارای جواب است.

الف) $y' = \frac{\ln|ty|}{1 - t^2 + y^2}$

ب) $y' = \frac{\cot(t)y}{1 + y}$

سوال ۳ . یک مخزن با ظرفیت ۵۰ گالون ، با مقدار اولیه ۱۰ گالون از آب خالص را در نظر بگیرید. در لحظه $t = 0$ آب

شوری شامل ۱ پوند نمک در هر گالون، با نرخ ۴ گالون بر دقیقه به مخزن در حال اضافه شدن است. در همین حال

شیر خروجی، مخلوط را با نرخ ۲ گالون بر دقیقه خارج می کند.

الف) در چه لحظه ای مخزن پر می شود؟

ب) مقدار نمک داخل مخزن در لحظه پر شدن مخزن را به دست آورید.

سوال ۴ . مساله با مقدار مرزی زیر را حل کرده و در مورد پیوستگی جواب و مشتق بحث کنید.

$$y' + p(t)y = 0 \quad y(0) = 1$$

جایی که

$$p(t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

سوال ۵ . (معادله برنولی) معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$y' + p(t)y = q(t)y^n$$

الف) مساله را برای حالت $n = 0$ و $n = 1$ حل کنید.

ب) در حالت $n \neq 0, 1$ با تغییر متغیر $u = y^{1-n}$ مساله را تبدیل به یک مساله خطی کرده و فرم کلی جواب را بنویسید.

ج) با استفاده از قسمت ب مساله زیر را حل کنید.

$$y' = 2xy/(x^2 - y^2 - 4)$$

سوال ۶ . معادلات زیر را در صورت کامل بودن حل کنید. (در غیر این صورت فاکتور انتگرال برای این معادلات را پیدا کرده

و سپس جواب آن را به دست آورید.)

$$(2xy^2 + 2y) + (2yx^2 + 2x)y' = 0 \quad \text{الف)}$$

$$(y(1 + xy)) dx - x dy = 0 \quad \text{ب)}$$

$$(y/x + \epsilon x) + (\ln x - 2)y' = 0 \quad x > 0 \quad \text{ج)}$$

سوال ۷ . معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

ثابت کنید اگر تابع f موجود به طوری که رابطه زیر برقرار باشد،

$$\frac{1}{yQ - xP} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = f(xy)$$

در این صورت معادله دیفرانسیل بالا دارای فاکتور انتگرال به فرم زیر است.

$$F(z) = e^{\int f(z)dz} \quad , \quad z = xy$$

سوال ۸ . معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$ydx + x(1 - 3x^2 y^2)dy = 0$$

الف) نشان دهید این معادله کامل نیست.

ب) اگر $\mu(x, y) = x^\alpha y^\beta$ یک عمل انتگرال ساز برای معادله باشد مقدار α و β را به دست آورید.

ج) با استفاده از قسمت ب جواب عمومی معادله دیفرانسیل را به دست آورید.

سوال ۹ . مساله زیر را در نظر بگیرید.

$$y' = y(3 - ty) \quad y(0) = 0.5$$

با انتخاب $h = 0.25$ با روش اویلر مقدار تابع در نقطه $t = 1$ را به دست آورید. سپس جواب دقیق را به دست

آورده و در آن نقطه جواب ها را مقایسه کنید.

سوال ۱۰ . برای کدام y ها، دنباله رو به رو همگراست؟ $y_{n+1} = \sqrt{(n+3)/(n+1)} y_n$

سوال ۱۱ . معادلات زیر را با روش تکرار پیکارد حل کنید.

الف) $y' = 2(y+1) \quad y(0) = 0$

ب) $y' = y + 1 - t \quad y(0) = 0$