



سوال ۱

فرض کنید $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد. اگر $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ، نشان دهید برای هر مقدار ثابت $a \in \mathbb{R}$ ، $g(x, y) = f(x, y, a)$ تابعی ثابت است.

سوال ۲

معادله ضمنی زیر را در نظر بگیرید:

$$\ln(xy) + 2e^{\frac{z}{x}} - x^2y + x + z - 2 = 0$$

الف) نشان دهید در یک همسایگی مناسب از $(x, y) = (1, 1)$ می توان z را برحسب تابعی از x و y نوشت؛

ب) نشان دهید نقطه $(1, 1)$ یک نقطه بحرانی برای $z = z(x, y)$ است و نوع آن را مشخص کنید. آیا با استفاده از آزمون مشتق دوم می توان نوع نقطه بحرانی را مشخص کرد؟

سوال ۳

به کمک روش ضرایب لاگرانژ، ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را تحت قید خواسته شده بیابید:

$$(1) \quad f(x, y, z) = xyz \quad \text{به طوری که } x^2 + z^2 = 1 \text{ و } y^2 + z^2 = 1$$

$$(2) \quad f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n \quad \text{به طوری که } x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

$$(3) \quad g(x_1, \dots, x_n) = x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n \quad \text{به طوری که } x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

$$(4) \quad f(x, y, z) = -x + y + 2z + 4 \quad \text{به طوری که } x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2x - 8z \leq 11$$

سوال ۴

فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد که همواره $|\nabla f| = \sqrt{2}$. تابع g را به صورت $f(x, y) =$

$f(xy, \frac{1}{y}(x^2 - y^2))$ تعریف کنید. مقادیر a و b را طوری بیابید که:

$$a\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right)^2 - b\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right)^2 = x^2 + y^2$$