به نام خدا

سری هشتم تمارین

درس ریاضی عمومی ۲

زمستان ۹۷

سوال ۱ فرض کنید تابع حقیقی مقدار f روی $\mathbb{R}^۳$ بدین صورت تعریف شده باشد:f در مبدا مختصات برابر با صفر و در نقاط غیر از مبدا مختصات با ضابطه $f(x,y,z)=\dfrac{xy^۲z}{x^۴+y^۴+z^۴}$ تعریف شده است.پیوستگی f در مبدا مختصات را بررسی کنید.همچنین مشتقات جزئی f را در مبدا مختصات محاسبه کنید.آیا توابع $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ در مبدا مختصات پیوسته می باشد؟

سوال ۲ (الف) برای رویه S که توسط معادله $z=e^{x^۲-۲x-۴y^۲+۵}$ توصیف می گردد معادله صفحه مماس بر این رویه در نقطه $(۱,-۱,۱)$ را بیابید.

(ب) رویه S که توسط معادله $x^۲+y^۲+۴z^۲=۱۶$ توصیف می شود را در نظر بگیرید.نقاط (a,b,c) از این رویه را به قسمی بیابید که صفحات مماس بر این رویه در این نقاط از نقطه $(۰,۰,۴)$ عبور کنند.

سوال ۳ (الف) فرض کنید $w=\dfrac{۱}{x^۲+y^۲+z^۲}$.نشان دهید w روی $\mathbb{R}^۳-\{(۰,۰,۰)\}$ در رابطه زیر صدق میکند:

$$x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}+z\frac{\partial w}{\partial z}=-۲w$$

(ب) فرض کنید تابع حقیقی مقدار $u(x,y)$ روی $\mathbb{R}^۲$ در رابطه :

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}-۴\frac{\partial^۲ u}{\partial x\partial y}+۳\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}=۰$$

صدق کند.با اعمال تعویض متغیر $t=۳x+y$ و $s=x+y$ تعیین کنید u در چه معادله ای بر حسب مشتق های جزئی بر حسب متغیر های s,t صدق می کند؟

سوال۴ فرض کنید تابع حقیقی مقدار دو متغیره $f(x,y)$ بر روی قرص $۰\leq x^۲+y^۲<۱$ تعریف شده باشد.فرض کنید f بر این قرص تابعی مشتق پذیر باشد و در رابطه $\nabla f=۰$ روی این قرص صدق کند.نشان دهید f روی این قرص تابعی ثابت است.

سوال ۵ فرض کنید f,g توابعی حقیقی مقدار و مشتق پذیر باشند که روی $\mathbb{R}^۲$ تعریف شده اند.میگوییم f,g بطور تابعی به یکدیگر وابسته هستند هر گاه تابعی حقیقی مقدار و مشتق پذیر روی $\mathbb{R}$ مانند $k(t)$ به قسمی موجود باشد که برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x,y)=k(g(x,y))$.نشان دهید اگر f,g وابسته تابعی باشند آنگاه دترمینان ماتریس ژاکوبی متناظر با تناظر $(x,y)\to(f(x,y),g(x,y))$ برابر با صفر می باشد.

حال فرض کنید f,g توابعی از کلاس C^1 روی $\mathbb{R}^2$ باشند و $\frac{\partial g}{\partial y}$ هیچ جا صفر نشود.در این حالت نشان دهید اگر دترمینان ماتریس ژاکوبی متناظر با نگاشت $(x,y) \to (f(x,y), g(x,y))$ متحد با صفر باشد آنگاه f,g بطور موضعی وابسته تابعی می باشند.

سوال ۶ (الف) نشان دهید که می توان دستگاه معادلات:

$$\begin{cases} xy^2 + zu + v^2 = 3 \\ x^3 z + 2y - uv = 2 \\ xu + yv - xyz = 1 \end{cases}$$

را در همسایگی نقطه $(x,y,z,u,v) = (1,1,1,1,1)$ نسبت به مجهولات x,y,z بر حسب توابعی از u,v حل نمود و سپس مستق های جزئی x,y,z را نسبت به u,v در نقطه $(1,1)$ بیابید.همچنین در نقطه $(1,1)$ مطلوبست یافتن $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

(ب) فرض کنید روابط

$$\begin{cases} F(x,y,z,w) = 0 \\ G(x,y,z,w) = 0 \end{cases}$$

مجهولات z,w را بر حسب توابعی از x,y تعیین کنند.عبارات $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ را بر حسب مشتقات جزئی F,G محاسبه کنید.

سوال ۷ فرض کنید f تابعی حقیقی مقدار روی $\mathbb{R}^2$ باشد که در مبدا مختصات برابر با صفر و در غیر از مبدا با ضابطه $f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ تعریف شده باشد.مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ در نقطه $(0,0)$.آیا این دو مقدار برابر هستند؟

سوال ۸ نشان دهید که معادله $x + 2y + z + e^{2z} = 1$ در همسایگی $(x,y) = (0,0)$ دارای جوابی بصورت $z = f(x,y)$ می باشد که در رابطه $f(0,0) = 0$ صدق می کند.چند جمله ای تیلور درجه دوم f را حول مبدا بیابید.