به نام خدا

سری هفتم تمارین

درس ریاضی عمومی ۲

زمستان ۹۷

سوال ۱ (الف) مشتق جهتی تابع $f(x,y,z)=x^۲+۲y^۲-۳z^۲$ را در نقطه $(۱,۱,۳)$ در امتداد منحنی C که واقع بر فصل مشترک رویه های:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲-۲=۰ \\ x+z-۴=۰ \end{cases}$$

می باشد محاسبه کنید.

(ب) فرض کنید در فضای سه بعدی دما در نقطه (x,y,z) با رابطه $T(x,y,z)=x^۲-y^۲+z^۲+z^۴+xz^۲$ توصیف شود.فرض کنید ذره ای که در فضای سه بعدی بر خم فصل مشترک رویه های:

$$\begin{cases} ۲x^۲+۲y^۲-z^۲=۰ \\ z=۳x^۲-y^۲ \end{cases}$$

حرکت می کند در لحظه $t=۰$ در نقطه $(۱,۱,۲)$ قرار داشته باشد.فرض کنید سرعت ذره در $t=۰$ برابر با ۷ باشد.ذره در $t=۰$ کدام آهنگ تغییر دما را حس خواهد نمود؟

سوال ۲ معادله خمی در صفحه xy را بیابید که از نقطه $(۱,۱)$ عبور کند و همه خم های تراز تابع $f(x,y)=x^۴+y^۴$ را در زاویه قائمه قطع کند. همچنین معادله خمی در صفحه xy با این خاصیت را بیابید که از نقطه $(۱-,۲)$ عبور کرده و همه خم های به معادله $x^۲y^۳=K$ را در زاویه قائمه قطع کند(K روی تمام اعداد حقیقی ناصفر تغییر می کند).

سوال ۳ فرض کنید $k\geq ۲$ عددی حقیقی و f تابعی دو متغیره و همگن روی $\mathbb{R}^۲$ باشد.یعنی برای هر $t,x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$.فرض کنید f دارای مشتق های جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد.نشان دهید برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داریم:

$$x^۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(x,y)+۲xy\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(x,y)+y^۲\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(x,y)=k(k-۱)f(x,y)$$

سوال ۴ (الف) نشان دهید در نقاط نزدیک به $P=(۱,۱,۱,۱)$ می توان u,v را بر حسب x,y توسط دستگاه معادلات روبرو

بدست آورد:

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ + uv + u = ۴ \\ xy + u^۳ + v = ۳ \end{cases}$$

و سپس مشتق های جزئی u, v را بر حسب x, y در نقطه $(x, y) = (۱, ۱)$ بدست آورید.همچنین $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$ را نیز در نقطه $(۱, ۱)$ بدست آورید. (ب) فرض کنید F, G, H توابعی حقیقی مقدار از رده $C^۱$ روی $\mathbb{R}^۴$ تعریف کنند و دستگاه معادلات:

$$\begin{cases} F(x, y, z, w) = ۰ \\ G(x, y, z, w) = ۰ \\ H(x, y, z, w) = ۰ \end{cases}$$

بطور موضعی x, z, w را بر حسب توابعی از y مشخص کنند.مطلوبست محاسبه $\frac{dx}{dy}$.

سوال ۵ ذره ای در فضای سه بعدی طوری حرکت می کند که سوی حرکت آن در هر نقطه عمود است بر آن رویه تراز:

$$f(x, y, z) = ۴ - x^۲ - ۲y^۲ + ۳z^۲$$

که از آن نقطه میگذرد.اگر مسیر این ذره از نقطه $(۱, ۱, ۸)$ بگذرد نشان دهید از $(۲, ۴, ۱)$ نیز خواهد گذشت.آیا مسیر حرکت این ذره از نقطه $(۳, ۷, ۰)$ نیز عبور می کند؟

سوال ۶ (الف) نقاط بحرانی توابع زیر را روی $\mathbb{R}^۳$ بیابید و آنها را رده بندی کنید:

.(۱)

$$f(x, y, z) = xyz - x^۲ - y^۲ - z^۲$$

.(۲)

$$f(x, y, z) = xy + x^۲z - x^۲ - y - z^۲$$

(ب) نشان دهید تابع $f(x, y, z) = ۴xyz - x^۴ - y^۴ - z^۴$ در نقطه $(۱, ۱, ۱)$ دارای ماگزیمم موضعی می باشد.آیا این تابع روی $\mathbb{R}^۳$ دارای ماگزیمم سرتاسری می باشد؟

(پ) ماگزیمم و مینیمم تابع $f(x, y, z) = xyze^{-x^۲-y^۲-z^۲}$ را روی $\mathbb{R}^۳$ بیابید.

سوال ۷ فرض کنید a, b, c زوایایی از یک مثلث باشند.نشان دهید $sin(\frac{a}{۲})sin(\frac{b}{۲})sin(\frac{c}{۲}) \leq \frac{۱}{۸}$.در کدام مثلث ها نابرابری بالا به تساوی تبدیل می شود؟

سوال ۸ فرض کنید $g(t)$ یک تابع یک متغیره مشتق پذیر باشد.نشان دهید تمام صفحات مماس بر رویه $z = yg(\frac{x}{y})$ از مبدا عبور می کنند.

سوال ۹ با استفاده از سری های تیلور برای هر عدد طبیعی n مقدار عبارت زیر را بیابید:

$$\frac{\partial^{۴n}}{\partial x^{۲n} \partial y^{۲n}} \frac{۱}{۱ + x^{۲} + y^{۲}}_{(۰,۰)}$$