به نام خدا

سری ششم تمارین

درس ریاضی عمومی ۲

زمستان ۹۷

سوال ۱ (الف) اعداد صحیح و نامنفی p, n, m در چه شرایطی باید صدق کنند تا وجود حد زیر تضمین شود؟

$$lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^p}$$

(ب) تمام ثابت های حقیقی a, b, c را به قسمی بیابید که به ازای آنها حد زیر وجود داشته باشد:

$$lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{ax^2+bxy+cy^2}$$

سوال ۲ آیا میتوان تابع زیر را در نقطه $(0,0)$ به قسمی تعریف نمود که تابع حاصل در این نقطه پیوسته شود؟

$$f(x,y) = \frac{(sinx)(sin^3 y)}{1-cos(x^2+y^2)}$$

در صورت ممکن بودن این امر مقدار تابع در $(0,0)$ را بیابید.

سوال ۳ فرض کنید $r = ui + vj$ برداری یکه و $f_r(t) = f(a+tu, b+tv)$ تابع یک متغیره ای باشد که از تحدید قلمرو $f(x,y)$ به نقاط خط راست گذرنده از (a,b) و موازی با بردار r به دست آمده است.اگر به ازای هر بردار یکه r تابع f_r در $t=0$ پیوسته باشد آیا می توان نتیجه گرفت که f در (a,b) پیوسته است؟برعکس آیا پیوستگی f در (a,b) پیوستگی f_r را در $t=0$ تضمین می کند؟

سوال ۴ تابع $f(x,y)$ و نقطه (a,b) متعلق به قلمرو آن مفروض هستند.دو تابع یک متغیره g, h را بصورت:

$$g(x) = f(x,b), h(y) = f(a,y)$$

تعریف می کنیم.اگر g در $x=a$ و h در $y=b$ پیوسته باشند آیا می توان نتیجه گرفت که f در (a,b) پیوسته می باشد؟برعکس آیا پیوستگی f در (a,b) پیوستگی g و h را به ترتیب در $x=a$ و $y=b$ نتیجه می دهد؟

سوال ۵ تابع $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ با ضابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x,y,z) = (x+y+z+xyz, x+y+z+cos(xyz), x+y+z+e^{xyz})$$

مشتق f را در نقطه $(0,1,2)$ بیابید و یک پایه برای فضای تصویر و هسته مشتق f در نقطه مذکور بیابید.

سوال ۶ فرض کنید $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد و برای هر $x\in\mathbb{R}^n$ داشته باشیم $\nabla f(x).x=f(x)$.نشان دهید رابطه $f(tx)=tf(x)$ را برای هر عدد حقیقی t و برای هر $x\in\mathbb{R}^n$ دارا هستیم.

سوال ۷ فرض کنید $n\geq 3$ و $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ را با ضابطه $f(x)=||x||^2$ در نظر بگیرید.

(الف) عدد حقیقی k را به قسمی بیابید که نقطه $a=k(e_1+2e_{n+1})+e_2$ روی نمودار f واقع باشد.

(ب) به ازای k بدست آمده در قسمت الف معادله ابرصفحه مماس بر نمودار f را در نقطه a بدست آورید و یک پایه برای آن صفحه معرفی کنید.

سوال ۸ (الف) مختصات همه نقاط متعلق به رویه دارای معادله $z=x^4-4xy^3+6y^2-2$ را بیابید که در آنها این رویه دارای صفحه مماس افقی می باشد.

(ب) همه صفحات افقی مماس بر رویه به معادله $z=xye^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$ را بیابید.

سوال ۹ (الف) فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ در مبدا برابر با صفر و در نقاط غیر از مبدا با ضابطه $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ تعریف شده باشد.نشان دهید f در مبدا پیوسته نمی باشد.لیکن مشتق های جزئی f در مبدا وجود دارند.

(ب) تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ در مبدا برابر با صفر و در نقاط غیر از مبدا با ضابطه $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ تعریف شده است.نشان دهید f در مبدا پیوسته نیست.لیکن برای هر بردار یکه $r=ui+vj$ مشتق سویی f در راستای r وجود دارد.به ازای چنین r بیان شده ای یک رابطه برای بدست آوردن مشتق سویی f در راستای r ارائه نمایید.

سوال ۱۰ رویه $x^2+y^2-2z^2=1$ و نقطه $P=(1,1,1)$ را در نظر بگیرید.نقاط Q از این رویه را به قسمی بیابید که پاره خط PQ در نقطه Q بر این رویه مماس باشد.در بین چنین پاره خط هایی کدامیک دارای کمترین طول می باشد؟