



به نام خدا

سری پنجم تمارین

درس ریاضی عمومی ۲

زمستان ۹۷

سوال ۱

فرض کنید  $k$  عدد حقیقی ناصفر دلخواهی باشد و  $r$  و  $\theta$  معرف مختصات قطبی در  $\mathbb{R}^2$  باشند. طول خم  $r = k\theta$  را در فاصله  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  بدست آورید.

سوال ۲

(الف) ذره ای با تندی ثابت روی دایره  $x^2 + y^2 = 25$  حرکت می کند و هر دو ثانیه یک دور کامل می زند. شتاب این ذره را وقتی در نقطه  $(3, 4)$  قرار دارد بیابید.

(ب) فرض کنید یک ذره متحرک در  $\mathbb{R}^3$  طوری حرکت می کند که بردار سرعت آن همواره عمود بر خط واصل بین ذره و نقطه ثابت  $P$  باشد. نشان دهید ذره روی یک کره در  $\mathbb{R}^3$  حرکت می کند.

سوال ۳

دوایر  $C_1 : x^2 + y^2 = 16$  و  $C_2 : (x - 5)^2 + y^2 = 1$  را در نظر بگیرید. دایره  $C_2$  قرار است که بر روی دایره  $C_1$  بچرخد. نقطه  $A_0 = (4, 0)$  را که در لحظه سکون همزمان روی دایره  $C_2$  و دایره  $C_1$  قرار دارد را در نظر بگیرید. با چرخش دایره  $C_2$  روی دایره  $C_1$  طبعاً مکان نقطه  $A_0$  نیز تغییر می کند.

(الف) با یک پرمایش مناسب مسیر حرکت نقطه  $A_0$  را بدست بیاورید.

(ب) طول مسیری که نقطه  $A_0$  طی می کند تا برای اولین بار به مکان اولیه خود بازگردد را حساب کنید.

سوال ۴

(الف) صفحه  $x + y + z = 1$  کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  را در دایره ای مانند  $C$  قطع می کند. مرکز  $C$  و شعاع  $C$  را بیابید.

(ب) آیا منحنی  $r(t) = (3t^3 - 9t, 3t - 3t^2, 2t^2 - 3t + 5)$  مسطح است؟ در صورت مسطح بودن معادله صفحه ای که این منحنی در آن قرار دارد را بیابید.

سوال ۵

در هر کدام از موارد زیر بردارهای  $B, T, N$  و انحنای و تاب خم مد نظر را در نقطه ذکر شده بیابید و همچنین طول هر کدام از آنها را در بازه تعیین شده بیابید.

(الف) منحنی  $\gamma(t) = (2t, t^2, \frac{1}{3}t^3)$  در  $t = 0$  و در بازه  $0 \leq t \leq 3$ .

(ب) منحنی  $\lambda(t) = (2 + \sqrt{2}\cos t, 1 - \sin t, 3 + \sin t)$  در  $t = \pi$  و در بازه  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

در مورد منحنی های قسمت های (الف) و (ب) آیا اعداد حقیقی  $p, q$  به قسمی وجود دارند که منحنی های ذکر شده به ازای  $p \leq t \leq q$  درون یک صفحه قرار گیرند؟

سوال ۶

معادله دایره های بوسان سهمی  $y = \frac{1}{p}x^2$  را در نقاط  $(0, 0)$  و  $(1, \frac{1}{p})$  پیدا کنید.

## سوال ۷

اگر مکان و سرعت و شتاب ذره متحرکی که به ترتیب با  $r$  و  $v$  و  $a$  نشان داده می شوند در رابطه :

$$a(t) = \lambda(t)r(t) + \mu(t)v(t)$$

صدق کنند که در آن  $\lambda(t)$  و  $\mu(t)$  دو تابع اسکالر از  $t$  هستند و اگر  $v \times a \neq 0$  نشان دهید که مسیر این ذره در یک صفحه قرار دارد.

## سوال ۸

سیم به طول  $L$  که دارای مقطع عرضی دایره ای به شعاع  $a$  است حول قرقره استوانه ای به شعاع  $b$  طوری می پیچانیم که همپوشی روی ندهد ولی هر دو پیچش مجاور به هم چسبیده باشند. چه طولی از قرقره به وسیله این سیم پوشانده می شود؟

## سوال ۹

(الف) خم  $r = r(t)$  که برای آن به ازای هر  $t$  داریم  $\kappa(t) = 1$  و  $\tau(t) = 1$  و  $r(\circ) = T(\circ) = i$  و  $N(\circ) = j$  و  $B(\circ) = k$  را بیابید.

(ب) کره  $S^2$  را در نظر بگیرید. فرض کنید خم  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S^2$  بر حسب طول قوس پرمایش شده باشد و اندازه بردار  $\gamma''(t)$  برای هر مقدار  $t$  برابر با مقدار ثابت ناصفر  $k < 1$  باشد. اگر  $\gamma(\circ) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1)$  و  $\gamma'(\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$  و  $B(\circ)$  موازی با بردار  $(1, 2, 1)$  باشد معادله خم  $\gamma$  که بر حسب طول پرمایش شده می باشد را بیابید.