سری چهارم تمارین

درس ریاضی عمومی ۲

زمستان ۹۷

به نام خدا

تمامی تمارین از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال، سیاوش شهشهانی، جلد دوم، ویراست دوم، انتشارات فاطمی استخراج شده اند.

سوال ۱ (صفحه ۴۵۶) یک چهاروجهی در $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید و چهار وجه آن را با s_1, s_2, s_3, s_4 نمایش دهید.فرض کنید u_i برداری عمود بر وجه i ام چهاروجهی در جهت رو به بیرون باشد که اندازه آن برابر با مقدار عددی مساحت s_i باشد.نشان دهید $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$.

سوال ۲ (صفحه ۴۵۶) فرض کنید u, v, w سه نقطه در $\mathbb{R}^3$ باشند. نشان دهید این سه نقطه روی یک خط راست قرار دارند اگر و فقط اگر $(u \times v) + (v \times w) + (w \times v) = 0$.

سوال ۳ (صفحه ۴۶۵) دترمینان هر یک از ماتریس های زیر را محاسبه کنید:

(الف) ماتریس $[a_{ij}]$ که در آن $1 \leq i, j \leq n$ و $a_{ij} = ij$.

(ب) ماتریس $[a_{ij}]$ که در آن $1 \leq i, j \leq n$ و $a_{n1} = n$ و $a_{(i)(i+1)} = i$ برای $1 \leq i \leq n-1$ و باقی درایه های این ماتریس برابر با صفر می باشد.

سوال ۴ (صفحه ۴۶۶) در هر مورد تعیین کنید n تایی مرتب $(A^1, ..., A^n)$ در $\mathbb{R}^n$ راستگرد است یا چپگرد و حجم n بعدی $P(A^1, ..., A^n)$ را محاسبه کنید:

(الف) در $\mathbb{R}^4$:

$$A^1 = (0, 0, 1, 1), A^2 = (1, 1, 0, 0), A^3 = (0, 1, 1, 0), A^4 = (1, 0, 1, 0)$$

(ب) در $\mathbb{R}^n$:

$$A^1 = e_1 + e_2, ..., A^{n-1} = e_{n-1} + e_n, A^n = e_n$$

که در آن $e_1, ..., e_n$ همان پایه استاندارد $\mathbb{R}^n$ می باشد.

سوال ۵ (صفحه ۴۶۶) منظور از یک ماتریس جایگشتی $n \times n$ ماتریسی است که در هر سطر و در هر ستون آن دقیقا یک درایه یک وجود دارد و بقیه درایه های آن صفر می باشد.دترمینان این ماتریس ها را حساب کنید.

سوال ۶ (صفحه ۴۶۶) فرض کنید A یک ماتریس $k \times k$ باشد و B یک ماتریس $k \times l$ و C یک ماتریس $l \times l$ باشد.نشان دهید:

$$det \begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix} = (det(A))(det(C))$$

سوال ۷ (صفحه ۴۶۷) فرض کنید $n > m$ و A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times m$ باشد.نشان دهید $det(BA) = 0$.

سوال ۸ (صفحه ۴۷۸) نشان دهید اگر نگاشت خطی $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ دارای n ویژه مقدار حقیقی متمایز باشد آنگاه f دارای پایه ای متشکل از ویژه بردار های f می باشد.

سوال ۹ (صفحه ۴۷۹) فرض کنید نگاشت خطی $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ دارای رتبه k است.یعنی $dim(f(\mathbb{R}^n)) = k$.توجه داشته باشید که لزوما $k \leq min\{m, n\}$.نشان دهید پایه ای چون B برای $\mathbb{R}^n$ و پایه ای چون $B^{'}$ برای $\mathbb{R}^m$ موجود است به طوری که:

$$M_{B'}^{B} = \begin{bmatrix} I_k & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

(راهنمایی:اگر رتبه f برابر با k باشد با استفاده از قضیه رتبه-پوچی نتیجه می شود که پوچی f برابر با $n - k$ است.زیر فضایی k بعدی از $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید که با هسته f فقط در صفر اشتراک دارد و پایه ای برای $\mathbb{R}^n$ بدین شکل گیرید که k عضو اول آن پایه ای از این زیر فضا باشد و $n - k$ عضو دیگر آن پایه ای برای هسته f باشد.)

سوال ۱۰ (صفحه ۴۷۹) برای هر ماتریس مربعی A اثر A را که آن را با $traceA$ یا trA نمایش می دهیم برابر است با مجموع درایه های قطر اصلی ماتریس A.فرض کنید $\lambda_1, ..., \lambda_n$ همه ریشه های معادله مشخصه ماتریس A اعم از حقیقی و مختلط باشند.نشان دهید:

$$trA = \lambda_1 + ... + \lambda_n, det(A) = \lambda_1 ... \lambda_n$$