به نام خدا

سری چهارم تمارین

درس ریاضی عمومی ۲

زمستان ۹۷

سوال ۱ فرض کنید $\alpha_1, ..., \alpha_n$ اعدادی حقیقی باشند.ماتریس:

$$A(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & . & . & . & \alpha_1^{n-1} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & \alpha_n & . & . & . & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

را اصطلاحا یک ماتریس واندرموند می گویند.نشان دهید دترمینان ماتریس واندرموند بالا با استفاده از فرمول زیر محاسبه می شود:

$$det A(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

سوال ۲ فرض کنید A, B, C, D ماتریس هایی $n \times n$ باشند که دو به دو جابجا می گردند.یعنی $AB = BA$ و $AC = CA$ و $AD = DA$ و $BC = CB$ و $BD = DB$ و $CD = DC$.نشان دهید:

$$det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = det(AD - BC)$$

سوال ۳ فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد.اگر u, v دو بردار ویژه $A^t A$ باشند که بر هم عمودند نشان دهید Au و Av نیز بر هم عمودند.

سوال ۴ ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن a, b, c اعداد حقیقی می باشند.شرایطی روی a, b, c تعیین کنید که تحت آن فضای $\mathbb{R}^4$ پایه ای متشکل از بردارهای ویژه تبدیل خطی که توسط ماتریس A القا می شود داشته باشد.

سوال ۵ فرض کنیدV فضای برداری متشکل از تمام توابع پیوسته از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشد. (الف) نشان دهیدV همراه با عمل جمع معمولی توابع و ضرب اسکالری که هر عدد حقیقی به شکل معمول در توابع ضرب می شود تشکیل یک فضای برداری می دهد.

(ب) تعریف کنید:

$$T: V \to V$$

$$(T(f))(x) = \int_{\circ}^{x} f(t)dt$$

نشان دهید T یک نگاشت خطی روی V تعریف می کند.نشان دهید T دارای مقدار ویژه ای نمی باشد.

سوال ۶ فرض کنید A و B ماتریس هایی $n \times n$ باشند.

(الف) نشان دهید ماتریس $I - AB$ وارون پذیر است اگر و فقط اگر ماتریس $I - BA$ وارون پذیر باشد و در صورت وارون پذیری این ماتریس ها داریم:

$$(I - BA)^{-۱} = I + B(I - AB)^{-۱}A$$

(ب) نشان دهید مقادیر ویژه ماتریس های AB و BA یکسان می باشد

سوال ۷ ماتریس مربعی A را پوچ توان می گوییم هرگاه عددی طبیعی مانند n چنان موجود باشد که $A^n = O$.نشان دهید ماتریس مربعی A پوچ توان است اگر و فقط اگر A مقدار ویژه ای (اعم از حقیقی و مختلط) به غیر از صفر نداشته باشد.

سوال ۸ (الف) فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد به قسمی که برای هر ماتریس $n \times n$ دلخواهی مانند B داشته باشیم $AB = BA$. نشان دهید A باید مضربی از ماتریس همانی باشد.یعنی نشان دهید عددی مانند c به قسمی وجود دارد که $A = cI$.

(ب) فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ نگاشتی خطی باشد به قسمی که برای هر دو پایه B و B' از $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم $M_B^B(f) = M_{B'}^{B'}(f)$. در اینصورت نشان دهید f باید مضربی از نگاشت همانی باشد.

سوال ۹ فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی و $\lambda_۱, ..., \lambda_k$ مقادیر ویژه دو به دو متمایزی از f و $X_۱, ..., X_k$ بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه باشند.نشان دهید $X_۱, ..., X_k$ مستقل خطی می باشند.