



به نام خدا

سری سوم تمارین

درس ریاضی عمومی ۲

زمستان ۹۷

سوال ۱ زیرفضای خطی E از \mathbb{R}^5 را بصورت زیر تعریف کنید:

$$E = \langle (1, 2, 3, 4, 5), (4, 7, 4, 4, 12), (0, 0, 1, 4, 2), (2, 3, -1, 0, 4) \rangle$$

با یافتن پایه ای برای E بعد آن را مشخص کنید.

سوال ۲ آیا عدد حقیقی t به قسمی موجود می باشد که زیر مجموعه $A = \{(1, 1, 1), (2, 3, 5), (5, 7, t)\}$ در \mathbb{R}^3 وابسته خطی باشد؟

سوال ۳ فرض کنید A_1, \dots, A_{k+1} نقاطی در \mathbb{R}^n باشند با این ویژگی که برای هر دو اندیس $i \neq j$ داشته باشیم $A_i \cdot A_j < 0$. نشان دهید $\{A_1, \dots, A_k\}$ مستقل خطی است.

سوال ۴ فرض کنید $\{u_1, \dots, u_5\}$ زیرمجموعه ای از \mathbb{R}^6 باشد به قسمی که $\{u_1, \dots, u_4\}$ و $\{u_2, \dots, u_5\}$ وابسته خطی و $\{u_2, \dots, u_4\}$ مستقل خطی باشد. نشان دهید $\{u_1, u_3, u_4, u_5\}$ وابسته خطی است.

سوال ۵ یک زیرفضای خطی ۲ بعدی از \mathbb{R}^4 به قسمی بیابید که شامل $(1, 3, 2, 5)$ و $(2, 4, 3, 1)$ نباشد.

سوال ۶ فرض کنید u, v نقاطی در \mathbb{R}^n باشند. نشان دهید $u \cdot v = 0$ اگر و فقط اگر برای هر عدد حقیقی c داشته باشیم:

$$|u| \leq |u + cv|$$

سوال ۷ در \mathbb{R}^4 فرض کنید $A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{4}}(0, 1, 0, -1) \right\}$ مجموعه A را به یک پایه متعامد یکه برای \mathbb{R}^4 گسترش دهید.

فرض کنید $A = \{u_1, \dots, u_m\}$ زیر مجموعه ای متعامد یکه از \mathbb{R}^n باشد.

۱. نشان دهید $\{u_1, \dots, u_m\}$ مستقل خطی است.

۲. فرض کنید $E = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$ نشان دهید برای هر v در E داریم:

$$v = (v \cdot u_1)u_1 + \dots + (v \cdot u_m)u_m$$

و نتیجه بگیرید که $|v|^2 = (v \cdot u_1)^2 + \dots + (v \cdot u_m)^2$

۳. نشان دهید که تساوی $|v|^2 = (v \cdot u_1)^2 + \dots + (v \cdot u_m)^2$ ایجاب می کند که v واقع در $\langle u_1, \dots, u_m \rangle$ است.