



به نام خدا

سری دوم تمارین

درس ریاضی عمومی ۲

زمستان ۹۷

تمامی تمارین از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال، سیاوش شهشهانی، جلد دوم، ویراست دوم، انتشارات فاطمی استخراج شده اند.

سوال ۱ (صفحه ۴۳۵) برای هر یک از ماتریس های داده شده A در زیر همه ماتریس های M ای را پیدا کنید که جذر A

باشند. یعنی $MM = A$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (پ)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ب)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

سوال ۲ (صفحه ۴۳۵) فرض کنید:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(الف): نشان دهید اگر برای ماتریس 2×2 ای مانند A داشته باشیم $AM = O$ آنگاه $A = O$.

(ب): ماتریس 3×3 ای مانند $B \neq O$ بیابید به قسمی که $MB = O$.

سوال ۳ (صفحه ۴۳۶) نشان دهید که تحت اثر هر تابع مستوی $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ تصویر هر خط راست یا خطی راست است یا

فقط یک نقطه. اگر l, l' دو خط موازی در \mathbb{R}^n باشند نشان دهید $f(l)$ و $f(l')$ یا هر دو نقطه هستند یا یک زوج خط موازی یا یک خط راست.

سوال ۴ (صفحه ۴۳۶) مجموعه تمام ماتریس های 2×2 حقیقی به شکل:

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

را با ξ نمایش می دهیم.

(الف): نشان دهید مجموع و حاصلضرب هر دو عضو از ξ در ξ واقع است.

(ب): تابع $H: \xi \rightarrow \mathbb{C}$ را بصورت $H(M) = \alpha + \beta i$ تعریف می کنیم. نشان دهید H تابعی یک به یک و پوشاست.

(پ): اگر M_1, M_2 عناصری از ξ باشند و H طبق (ب) تعریف شده باشد نشان دهید:

$$H(M_1 + M_2) = H(M_1) + H(M_2)$$

$$H(M_1 M_2) = H(M_1) H(M_2)$$

(صفحه ۴۴۶) در هر مورد برای تابع خطی مربوط به ماتریس داده شده هسته و تصویر تابع را توصیف کنید و مشخص کنید که تابع خطی یک به یک است یا نیست. پوشا است یا نیست و اگر تابع خطی وارون پذیر است ماتریس وارون تابع را محاسبه کنید.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ (ت) } \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ (پ) } \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \text{ (ب) } \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (چ) } \quad F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ج) } \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ث)}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \text{ (ح)}$$

(صفحه ۴۴۷) نگاشت خطی $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ماتریس زیر داده شده است:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

تصویر خط راست $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$ و صفحه $x + 2y - 2z - 4 = 0$ را تحت اثر f پیدا کنید.

(صفحه ۴۴۷) تابع خطی $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ماتریس زیر داده شده است:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

بعد هسته و بعد تصویر تابع f را تعیین کنید. تصویر ابرصفحه $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0$ را تحت اثر f پیدا کنید.

(صفحه ۴۴۷) فرض کنید تابع خطی $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ چنان باشد که $f \circ f$ تابع ثابت با مقدار صفر باشد. نشان دهید بعد هسته f بزرگتر یا مساوی n است. به ازای $n = 2$ مثال هایی از این چنین توابع خطی ارائه کنید که بعد هسته برابر با ۲ و

سوال ۹

(صفحه ۴۴۷) فرض کنید برای ماتریس $n \times n$ ای مانند $A \neq O$ ماتریس $n \times n$ ای مانند $B \neq O$ وجود داشته باشد به قسمی که $AB = O$. نشان دهید ماتریس $n \times n$ ای مانند $C \neq O$ وجود دارد به طوری که $CA = O$. (راهنمایی: توابع خطی متناظر با ماتریس ها را در نظر بگیرید.)

سوال ۱۰

(صفحه ۴۴۸) دستگاه خطی متشکل از m معادله و n مجهول زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

اگر دستگاه بالا به ازای یک $b = (b_1, \dots, b_m)$ دارای جواب یکتا باشد نشان دهید که برای هر b دلخواه دستگاه بالا یا جواب ندارد یا جواب یکتا دارد.