# تمارین سری اول - ریاضی عمومی ۲ - نیم‌سال دوم ۹۸-۹۷

دانشکده علوم ریاضی

**تمرین ۱:** وضعیت نسبی (تقاطع-تنافر-توازی-انطباق) زوج خطوط زیر را تعیین کنید:

(الف) : در $\mathbb{R}^3$ خطوط :

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{1} \quad ، \quad \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{3}$$

(ب) : در $\mathbb{R}^4$ خطوط :

$$\frac{x_1-5}{3}=\frac{x_2-5}{2}=\frac{x_3}{1}=\frac{x_4+1}{-1} \quad ، \quad \frac{x_1-2}{6}=\frac{x_2-3}{4}=\frac{x_3+1}{2}=\frac{x_4}{-2}$$

(پ) : در $\mathbb{R}^4$ خطوط :

$$\frac{x_1+2}{6}=\frac{x_2-1}{1}=\frac{x_3-1}{-1}=\frac{x_4-2}{2} \quad ، \quad \frac{x_1}{-2}=\frac{x_2+1}{0}=\frac{x_3-1}{1}=\frac{x_4}{-2}$$

**تمرین ۲:** وضعیت نسبی (تقاطع-تنافر-توازی-انطباق) زوج صفحات زیر را تعیین کنید:

(الف): در $\mathbb{R}^4$ صفحات :

$$(0,1,-1,2)+<e_2-e_4,e_1+e_3> \quad ، \quad <e_1,e_2+e_3>$$

(ب) : در $\mathbb{R}^4$ صفحات :

$$(0,1,2,-1)+<e_1+e_2,e_3+e_4> \quad ، \quad (-1,1,2,1)+<e_1+e_2-e_3,e_4>$$

(پ) : در $\mathbb{R}^4$ صفحات :

$$<2e_1-e_2+e_3+e_4,e_3+e_4> \quad ، \quad (1,1,-1,2)+<e_1+e_3,e_2+e_3-e_4>$$

(ت) : در $\mathbb{R}^5$ صفحات :

$$(1,1,1,-1,1)+<-e_1+e_2,e_3-2e_4+3e_5> \quad ،$$
$$(0,1,0,-1,2)+<e_1+3e_2-e_4,e_3+e_5>$$

**تمرین ۳:** خط راست $<e_3>$ و صفحه $<e_1,e_2>$ در $\mathbb{R}^4$ همدیگر را در مبدا مختصات قطع می‌کنند.

(الف): نشان دهید خطوطی موازی $<e_3>$ در $\mathbb{R}^4$ موجود هستند به قسمی که اشتراک آنها با صفحه $<e_1,e_2>$ تهی است.

(ب): صفحه های $<e_1,e_2>$ و $<e_3,e_4>$ یکدیگر را در مبدا مختصات قطع میکنند.آیا صفحه ای موازی $<e_3,e_4>$ در $\mathbb{R}^4$ وجود دارد که اشتراک آن با صفحه $<e_1,e_2>$ تهی باشد؟

(پ): صفحه های $< e_۱, e_۲ >$ و $< e_۳, e_۴ >$ را در $\mathbb{R}^۵$ در نظر گیرید.آیا صفحه ای موازی $< e_۳, e_۴ >$ در $\mathbb{R}^۵$ موجود است به قسمی که اشتراک آن با صفحه $< e_۱, e_۲ >$ تهی باشد؟

**تمرین ۴:** در هر مورد تحقیق کنید که مجموعه داده شده مستقل خطی است یا وابسته خطی:

(الف): در $\mathbb{R}^۳$ مجموعه $\{(۱, -۱, ۲), (-۱, ۰, ۱), (۱, ۱, ۰)\}$

(ب): در $\mathbb{R}^۴$ محموعه $\{(۱, ۰, ۰, ۱), (۱, ۰, ۱, ۰), (۱, ۱, ۰, ۰)\}$

(پ): در $\mathbb{R}^۴$ مجموعه $\{(۰, ۳, ۱, ۱), (۲, ۱, ۱, ۰), (۱, -۱, ۰, ۲)\}$

(ت): در $\mathbb{R}^n$ مجموعه $\{e_۱ + e_۲, e_۲ + e_۳, ..., e_{n-۱} + e_n, e_n + e_۱\}$

**تمرین ۵:** وضعیت نسبی (تقاطع-توازی-تنافر-انطباق) زیر فضاهای داده شده را تعیین کنید:

(الف): در $\mathbb{R}^۴$ خط راست :

$$\frac{x_۱ - ۲}{۳} = \frac{x_۲}{-۱} = \frac{x_۳ + ۱}{-۲} = \frac{x_۴ - ۱}{۰}$$

و زیرفضای خطی : $< e_۱, e_۲, e_۳ >$

(ب): در $\mathbb{R}^۵$ خط راست :

$$\frac{x_۱}{۲} = \frac{x_۲ - ۱}{۱} = \frac{x_۳ + ۱}{۰} = \frac{x_۴ - ۲}{-۱} = \frac{x_۵ + ۲}{۲}$$

و زیرفضای خطی : $< e_۲, e_۲ - e_۳, e_۲ + e_۴ >$

(پ): در $\mathbb{R}^۵$ صفحه :

$$< (۰, ۲, ۰, ۲, ۱), (۱, ۱, ۲, ۲, ۲) >$$

و زیرفضای مستوی : $< (۲, ۲, ۰, ۰, ۱), (۰, ۱, ۲, -۱, -۱), (۱, ۰, ۰, -۱, ۰) > + (-۱, -۱, ۰, ۲, ۱)$

**تمرین ۶:** فرض کنید $E$ یک زیرفضای خطی $k$ بعدی از $\mathbb{R}^n$ باشد و $۱ \leq l < k$ . فرض کنید $\{A_۱, ..., A_l\}$ زیرمجموعه ای مستقل خطی از $E$ باشد. نشان دهید عناصر $A_{l+۱}, ..., A_k$ در $E$ به قسمی موجودند که $\{A_۱, ..., A_k\}$ پایه ای برای $E$ است.

**تمرین ۷:** فرض کنید $E_۱, E_۲$ زیر فضاهایی مستوی از $\mathbb{R}^n$ باشند که اشتراک $E_۱, E_۲$ تک نقطه ای باشد. نشان دهید هیچ خط راستی در $E_۱$ با هیچ خط راستی در $E_۲$ موازی نیست.

**تمرین ۸:** فرض کنید $E_۱$ یک زیرفضای مستوی $k$ بعدی و $E_۲$ یک زیرفضای مستوی $l$ بعدی $\mathbb{R}^n$ باشند که در آن $l, k \geq ۱$ و $k + l > n$.نشان دهید خط راستی چون $l_۱$ در $E_۱$ و خط راستی چون $l_۲$ در $E_۲$ موجودند به قسمی که $l_۱ || l_۲$.

**تمرین ۹:** در هر مورد معادله یا معادلاتی بنویسید که زیرفضای داده شده را توصیف می‌کند:

(الف): در $\mathbb{R}^۴$ ابرصفحه ای که از $(۱,-۱,۲,۳)$ می گذرد و بر خط راست $\frac{x_۱}{۲}=\frac{x_۲-۱}{۱}=\frac{x_۳}{۰}=\frac{x_۴+۱}{۳}$ عمود است.

(ب): در $\mathbb{R}^۵$ خط راستی که از $(۲,۱,-۱,۰,۳)$ می گذرد و بر ابرصفحه $x_۱+x_۲+x_۳-x_۴+۲x_۵+۱=۰$ عمود است.

(پ): در $\mathbb{R}^۴$ صفحه گذرنده از مبدا مختصات و شامل خط راست $\frac{x_۱+۱}{-۱}=\frac{x_۲}{۲}=\frac{x_۳}{۱}=\frac{x_۴-۲}{۳}$

(ت): در $\mathbb{R}^۴$ صفحه گذرنده از $(۱,-۱,۰,۱)$ و موازی مکمل قائم صفحه گذرنده از مبدا مختصات و دو نقطه $(-۱,۱,۲,۳)$ و $(۲,-۱,-۱,۱)$

**تمرین ۱۰:** نشان دهید فاصله نقطه $(a_۱,...,a_n)$ از ابرصفحه $A_۰+A_۱x_۱+...+A_nx_n=۰$ برابر است با :

$$\frac{|A_۰+A_۱a_۱+...+A_na_n|}{\sqrt{A_۱^۲+...+A_n^۲}}$$

**تمرین ۱۱:** فرض کنید $p$ و $L$ به ترتیب یک نقطه و یک خط راست در $\mathbb{R}^n$ باشند.نشان دهید حداقل فاصله $p$ از نقاط $L$ برای نقطه ای مثل $q$ واقع بر $L$ بدست می آید به قسمی که بردار $q-p$ بر $L$ عمود باشد. اگر خط راست $L$ را بصورت $L=a+<A>$ نمایش دهیم نشان دهید :

$$q=a+\frac{(p-a).A}{|A|^۲}A$$

**تمرین ۱۲:** اگر $L=a+<A>$ یک خط راست و $E$ یک زیرفضای مستوی در $\mathbb{R}^n$ باشد زاویه بین $E,L$ را برابر با زاویه بین $A$ و تصویر قائم آن روی $E$ تعریف می کنیم.

(الف):اگر $\{b_۱,...,b_k\}$ یک پایه متعامد یکه برای $E^\circ$ باشد نشان دهید زاویه بین $L,E$ برابر است با :

$$cos^{-۱}\frac{\sqrt{(A.b_۱)^۲+...+(A.b_k)^۲}}{|A|}$$

(ب): اگر $L=a+<A>$ یک خط راست $L$ و $Q.(X-P)=۰$ یک ابرصفحه $E$ در $\mathbb{R}^n$ باشند نشان دهید زاویه بین $L,E$ برابر است با $sin^{-۱}\frac{A.Q}{|A||Q|}$

(پ): زاویه بین خط راست $\frac{x_۴+۲}{۱}=\frac{x_۳+۱}{-۱}=\frac{x_۲}{۱}=\frac{x_۱-۲}{۱}$ و ابرصفحه $۲x_۲-۲x_۳-x_۴+۵=۰$ در $\mathbb{R}^۴$ را پیدا کنید.

**تمرین ۱۳:** اعداد حقیقی $a,b,c$ با شرط $a>۰$ و $ac-b^۲>۰$ داده شده اند.برای بردارهای $u,v$ در $\mathbb{R}^۲$ تعریف کنید :

$$u * v = au_1v_1 + b(u_1v_2 + u_2v_1) + cu_2v_2$$

(الف): نشان دهید $*$ خواص ضرب داخلی را داراست. یعنی بردار ها تحت $*$ با یکدیگر جابجا می‌شوند و $*$ از طرف چپ و راست در جمع بردارها پخش می‌شود و اسکالر در ضرب $*$ خاصیت شرکت پذیری دارد و $*$ مثبت معین است.

(ب): اگر $b = c = 1$ و $a = 2$ ، زاویه بین دو محور مختصات را نسبت به ضرب داخلی $*$ پیدا کنید.