

# تمرین‌های ریاضی عمومی ۱

## (سری نهم)

۲۲ اردیبهشت ۱۳۹۸

**تمرین ۱:** دنباله  $\{a_n\}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_0 = 0, \quad a_n = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{a_{n-1}} + a_{n-1} \right) \quad (n \geq 1)$$

الف) جملات  $a_1, a_2, a_3$  را در این دنباله محاسبه کنید؛

ب) نشان دهید دنباله  $\{a_n\}$  همگراست؛

پ) حد دنباله را در بی‌نهایت به دست آورید.

**تمرین ۲:** دنباله حقیقی  $\{a_n\}$  در معادله  $7a_{n+1} = a_n^2 + 6$  صدق می‌کند. اگر  $a_1 = 1/2$  ثابت کنید این دنباله صعودی است و حد آن را در صورت وجود بیابید.

**تمرین ۳:** در همگرایی دنباله زیر بحث کنید:

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n \left( 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

(راهنمایی: می‌توانید از نامساوی  $\ln(1+x) < x$  برای  $x > 0$  استفاده کنید.)

**تمرین ۴:** نشان دهید حد زیر وجود دارد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

**تمرین ۵:** فرض کنید دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد به طوری که برای هر  $m$  و  $n$ ،  $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ . ثابت کنید  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n$  وجود دارد.

**تمرین ۶:** برای هر عدد طبیعی  $n$  تعریف می‌کنیم:

$$a_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$$

الف) نشان دهید  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ؛

ب) نشان دهید  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-a_n}{1/n} = \ln 2$ .