

# تمرین‌های ریاضی عمومی ۱

## (سری هفتم)

۱۴ اردیبهشت ۱۳۹۸

**تمرین ۱:** اگر  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  دو بار مشتق پذیر باشد و  $f(a) = f(b) = 0$ ، نشان دهید

$$\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x) dx = 2 \int_a^b f(x) dx$$

**تمرین ۲:** فرض کنید  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد با این ویژگی که  $\int_0^1 f(x) dx = 1$ . نشان دهید  $c_1, c_2 \in [0, 1]$  وجود دارد به طوری که:

$$f(c_1) = 2c_1 \quad , \quad f(c_2) = 3c_2^2$$

**تمرین ۳:** فرض کنید  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد به طوری که برای هر  $x \in \mathbb{R}$ ،  $\int_0^1 f(xt) dt = 0$ . ثابت کنید  $f$  تابع ثابت صفر است.

**تمرین ۴:** فرض کنید  $f$  و  $g$  دو تابع انتگرال پذیر در بازه  $[a, b]$  باشند. نشان دهید

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} \left( \int_a^b g^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

**تمرین ۵:** فرض کنید  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد. نشان دهید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0.$$

**تمرین ۶:** درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) + c \quad (\text{پ}) \qquad \int \frac{x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + c \quad (\text{الف})$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c \quad (\text{ت}) \qquad \int \frac{x}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - a^2| + c \quad (\text{ب})$$

**تمرین ۷:** ثابت کنید تابع زیر خاصیت مقدار میانی را دارد ولی مشتق چیزی نیست.

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ \alpha \neq 0 & x = 0 \end{cases}$$