

تمرین‌های ریاضی عمومی ۱

(سری چهارم)

۱۹ اسفند ۱۳۹۷

تمرین ۱: تابع f را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

رفتار تابع و مشتق آن وقتی x به سمت صفر نزدیک می‌شود بررسی کنید و نمودار تابع را رسم کنید.

تمرین ۲: فرض کنید $f(0) = 0$ و به ازای هر x ، $|f(x)| \geq \sqrt{|x|}$. نشان دهید که $f'(0)$ وجود ندارد.

تمرین ۳: فرض کنید $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و روی $(0, \infty)$ مشتق‌پذیر است. به علاوه فرض کنید $f(0) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. نشان دهید $c \in (0, \infty)$ وجود دارد که $f'(c) = 0$.

تمرین ۴: فرض کنید $f(x) = x^5 - x^3 - x$. نشان دهید برای $a, b \in [-1, 1]$ داریم:

$$|f(b) - f(a)| \leq 1.45|b - a|$$

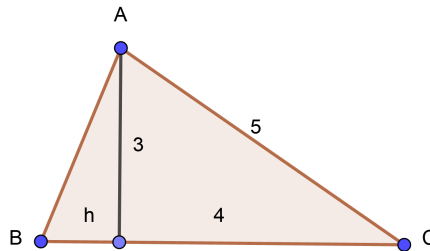
تمرین ۵: فرض کنید $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و $b \in \mathbb{R}$. اگر $\lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) = b$ ثابت کنید

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = b.$$

تمرین ۶: اگر تابع f در نقطه $x = a$ دو بار مشتق‌پذیر باشد ثابت کنید

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2} = f''(a).$$

تمرین ۷: در مثلث ABC طول بعضی از قطعات مربوط در شکل مشخص شده است. فرض کنید طول h در مقایسه با سایر طول‌های نمایش داده شده بسیار کوچک است. از روش تقریب خطی مقداری تقریبی برای سینوس زاویه \widehat{BAC} به دست آورید.



تمرین ۸: تابع $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ را در نظر بگیرید.

الف) به کمک تقریب خطی تابع در نقطه $x = 1$ مقدار تقریبی $f(1.01)$ را به دست آورید؛

ب) نشان دهید خطا در این تقریب، کمتر از 5×10^{-5} است؛

پ) مقدار تقریبی در قسمت (الف) از مقدار واقعی کم تر است یا بیش تر؟ چرا؟