

تمرین‌های ریاضی عمومی ۱

(سری سوم)

۱۶ اسفند ۱۳۹۷

تمرین ۱: مشتق توابع زیر را حساب کنید:

$$f(x) = \tan(\sin x^2) \quad \text{الف)}$$

$$g(x) = (x^2 + 1)^{\sin x} \quad \text{ب)}$$

$$h(x) = a^{a^x} + a^{x^a} + x^{a^a} \quad \text{پ)}$$

تمرین ۲: فرض کنید $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$. در این صورت $f^{(1398)}(0)$ را بیابید.

تمرین ۳: نشان دهید منحنی $y = x^2$ و خط مستقیم $x + 4y = 18$ در یکی از دو نقطه اشتراکشان در زوایای قائمه متقاطع‌اند. (راهنمایی: حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها در نقاط اشتراکشان را بیابید.)

تمرین ۴: فرض کنید تابع f روی $[0, 2]$ پیوسته و روی $(0, 2)$ مشتق‌پذیر است و همچنین $f(0) = f(1) = 0$ و $f(2) = 1$. نشان دهید $a, b, c \in (0, 2)$ وجود دارد به طوری که

$$f'(a) = 1/2, \quad f'(b) = 1/7, \quad f''(c) > 1/2.$$

تمرین ۵: با استفاده از قضیه مقدار میانگین ثابت کنید برای هر $x > 0$,

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

تمرین ۶: اگر برای $-1 < x < 1$ داشته باشیم $x \leq f(x) \leq x^2 + x$ ، مقدار $f'(0)$ را بیابید.

تمرین ۷: فرض کنید تابع f در نقطه $x = a$ مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

تمرین ۸: در معادله‌های زیر خط مماس بر منحنی در نقطه داده شده را بیابید:

$$\text{الف) } x \sin(xy - y^2) = x^2 - 1 \quad \text{در } (1, 1)$$

$$\text{ب) } \frac{x}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^3 = 2 \quad \text{در } (1, 1)$$

تمرین ۹: فرض کنید $f'(a) > 0$. نشان دهید $\delta > 0$ وجود دارد که برای هر $x \in (a, a + \delta)$ ، $f(x) > f(a)$.

تمرین ۱۰: در برهان زیر از قضیه مقدار میانگین تعمیم‌یافته چه چیزی نادرست است؟

بنا به قضیه مقدار میانگین، به ازای c بین a و b ، $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ ، به همین ترتیب، به ازای c بین a و b ، $g(b) - g(a) = g'(c)(b - a)$ از این رو

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad \square$$