

# تمرین‌های ریاضی عمومی ۱

## (سری دوم)

۲ اسفند ۱۳۹۷

**تمرین ۱:** فرض کنید  $\{a_n\}$  یک دنباله کوشی باشد. نشان دهید

الف) دنباله  $\{a_n\}$  کراندار است؛

ب) اگر زیر دنباله‌ای از  $\{a_n\}$  همگرا باشد آنگاه خود دنباله نیز همگراست.

**تمرین ۲:** به کمک اصل تمامیت ثابت کنید هر دنباله صعودی و از بالا کراندار همگراست و نتیجه بگیرید هر تابع صعودی و از بالا کراندار در بی‌نهایت حد دارد.

**تمرین ۳:** تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته و برای هر  $q_1 < q_2$  گویا،  $f(q_1) < f(q_2)$ . نشان دهید  $f$  روی  $\mathbb{R}$  اکیدا صعودی است.

**تمرین ۴:** نشان دهید مقدار تابع  $f(x) = (x-a)^2(x-b)^2 + x$  در نقطه‌ای مانند  $x_0$  برابر  $(a+b)/2$  می‌شود.

**تمرین ۵:** فرض کنید  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  تابعی پیوسته باشد. نشان دهید  $c \in [0, 1]$  موجود است که  $f(c) = c$ .

**تمرین ۶:** فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته و تناوبی با دوره تناوب  $2\pi$  است. نشان دهید  $a \in \mathbb{R}$  وجود دارد که  $f(a + \pi) = f(a)$ . آیا می‌توانید این نتیجه را تعمیم دهید؟

**تمرین ۷:** فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع پیوسته است که  $f(f(f(x))) = x$ . نشان دهید  $f(x) = x$ .

**تمرین ۸:** ثابت کنید هر تابع پیوسته و یک به یک، اکیدا یکنواست.

**تمرین ۹:** تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته است و نقاط  $x_1 < x_2 < x_3$  وجود دارند که

$$f(x_1) = x_2, \quad f(x_2) = x_3, \quad f(x_3) = x_1$$

ثابت کنید  $c_1 < c_2$  وجود دارد که  $f(c_1) = c_1$  و  $f(c_2) = c_2$ .