

# تمرین‌های ریاضی عمومی ۱

## (سری اول)

۲۶ بهمن ۱۳۹۷

**تمرین ۱:** با رسم شکل در صفحه مختلط، مجموعه نقاطی که در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند را مشخص کنید:

الف)  $|z/(1+i)| \leq 3$

ب)  $|z-2i| + |z+2i| = 16$

ج)  $\operatorname{Re}(z^3) < \operatorname{Im}(z^3)$

د)  $|z/\bar{z} + \bar{z}/z| = 1$

**تمرین ۲:** فرض کنید  $z_1, z_2$  و  $z_3$  سه عدد مختلط روی دایره واحد باشند. اگر  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$  نشان دهید

۱.  $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0$

۲.  $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0$

۳.  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$

**تمرین ۳:** اگر برای عدد مختلط  $z$  داشته باشیم  $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$ ، نشان دهید برای هر  $n \in \mathbb{N}$  داریم

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta.$$

**تمرین ۴:** برای هر یک از موارد زیر تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  مثال بزنید که شرط خواسته شده را برآورده کند:

الف) تابع  $f$  در هیچ نقطه‌ای پیوسته نباشد.

ب) تابع  $f$  فقط در یک نقطه پیوسته باشد.

ج) تابع  $f$  فقط در دو نقطه پیوسته باشد.

د) تابع  $f$  در نقاط گنگ پیوسته و در نقاط گویا ناپیوسته باشد.

**تمرین ۵:** فرض کنید  $f$  و  $g$  در نقطه  $x = a$  پیوسته هستند. نشان دهید توابع  $|f|$ ،  $f^2$  و  $\max\{f, g\}$  نیز در نقطه  $x = a$  پیوسته‌اند.

**تمرین ۶:** فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع پیوسته باشد که برای هر  $x \in \mathbb{Q}$ ،  $f(x) = 0$ . نشان دهید  $f$  تابع ثابت صفر است.