دانشگاه صنعتی شریف_دانشکده علوم ریاضی

کلید آزمون میانترم ریاضی مهندسی   فروردین ۱۳۹۸

---

۱. تابع f را با ضابطه‌ی $f(x)=\sinh x$ در نظر بگیرید.

الف) سری فوریه‌ی توسیع متناوب f را روی $[-\pi,\pi]$ به دست آورید.

ب) سری فوریه‌ی توسیع متناوب زوج f را روی $[0,\pi]$ به دست آورید.

حل الف) برای تابع f با دوره تناوب $T=2l$ داریم: ۱

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right)$$ ۲

به قسمی که

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,dx \quad , \quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,dx$$ ۳

در این پرسش $l=\pi$ و $f(x)=\sinh x$ تابعی فرد است. پس $a_n=0$ و

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sinh x\ \sin nx\ dx=(-1)^{n+1}\frac{2n\sinh\pi}{\pi(n^2+1)}$$ ۴

حل ب) سری فوریه‌ی توسیع متناوب زوج f روی $[0,\pi]$ عبارت است از:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$$ ۳

به قسمی که

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)dx$$ ۲

پس

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sinh x\cos(nx)dx=(-1)^{n+1}\frac{2n}{\pi(n^2+1)}(1+\cosh\pi)$$ ۵

۲. معادله‌ی دیفرانسیل پاره ای $u_t = u_{xx}$ را برای $x \in \mathbb{R}$ و $t > \circ$ با شرط $u(x, \circ) = f(x)$ که f تابعی پیوسته است و $\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = \circ$ در نظر بگیرید.

الف) معادله را به روش جداسازی متغیرها حل کنید.

ب) معادله را به کمک تبدیل فوریه حل کنید.

امتیازی (۱۰ نمره ای)

حل الف) فرض کنیم $u(x,t) = X(x)T(t)$. پس $u_t = X(x)T'(t)$ و $u_{xx} = X''(x)T(t)$. با جایگذاری در معادله‌ی $u_t = u_{xx}$ نتیجه میشود:

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

یا به طور معادل

$$X'' + \lambda X = \circ \quad , T' + \lambda T = \circ$$

۲

که در آن λ عدد ثابتی است. برای $\lambda < \circ$ جوابهای نمایی برای X به دست می آید که با کراندار بودن u سازگار نیست. برای $\lambda = \omega^۲ \geq \circ$ که $\omega \geq \circ$ داریم: ۲

$$X_\omega(x) = A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x \quad , \quad T_\omega(t) = e^{-\omega^۲ t}$$

$$u_\omega(x,t) = \Big(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega\Big)e^{-\omega^۲ t}$$

۲

چون شرط مرزی نداریم مقادیر ω را به طور پیوسته در نظر میگیریم:

$$u(x,t) = \int_\circ^\infty \Big(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega\Big)e^{-\omega^۲ t}\, d\omega$$

۱

از شرط اولیه‌ی $u(x,\circ) = f(x)$ نتیجه میشود:

$$f(x) = \int_\circ^\infty \Big(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\Big)\, d\omega$$

۱

به این ترتیب $A(\omega)$ و $B(\omega)$ ضرایب انتگرال فوریه‌ی f هستند:

$$A(\omega) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos\omega x\, dx \quad ۱ \quad B(\omega) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\sin\omega x\, dx \quad ۱$$

نمره ندارد

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_\circ^\infty \Big(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\Big)e^{-\omega^۲ t}\, d\omega = \frac{۱}{\pi}\int_\circ^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos(\omega(t-x))e^{-\omega^۲ t}\, dt\, d\omega \\
&= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(t)\Big(\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_\circ^\infty e^{-\omega^۲ t}\cos(\omega(x-t))\, d\omega\Big)\, dt \\
&= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x-\xi)\Big(\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_\circ^\infty e^{-\omega^۲(x-\xi)}\cos\omega\xi\, d\omega\Big)\, d\xi \\
&= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x-\xi)\Big(\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_\circ^\infty e^{-z^۲(x-\xi)}\cos\xi z\, dz\Big)\, d\xi \\
&= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x-\xi)\mathcal{F}_c(e^{-tz^۲})\, d\xi = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x-\xi)\mathcal{F}(e^{-tz^۲})\, d\xi \\
&= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x-\xi)\frac{۱}{\sqrt{۲t}}e^{-\frac{\xi^۲}{۴t}}\, d\xi = \frac{۱}{۲\sqrt{\pi\, t}}\int_{-\infty}^\infty f(x-\xi)\, e^{-\frac{\xi^۲}{۴t}}\, d\xi
\end{aligned}$$

حل ب) فرض کنیم $U(\omega,t)$ تبدیل فوریه‌ی $u(x,t)$ نسبت به متغیر x باشد.

$$u_t = u_{xx} \implies \mathcal{F}(u_t) = \mathcal{F}(u_{xx})$$ ۱

$$\implies U_t(\omega,t) = -\omega^2 U(\omega,t)$$ ۴

از سوی دیگر $U(\omega,0) = \mathcal{F}(u(x,0)) = \mathcal{F}(f(x))$. با حل این معادله دیفرانسیل عادی مرتبه یک داریم: ۱

$$U(\omega,t) = U(\omega,0)e^{-\omega^2 t} = \mathcal{F}(f(x))e^{-\omega^2 t}$$ ۴

و از آنجا:

۳

$$\begin{aligned}
u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(U(\omega,t)) &= \mathcal{F}^{-1}(U(\omega,0)e^{-\omega^2 t}) \\
&= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f(x))e^{-\omega^2 t}) \\
&= \mathcal{F}^{-1}\Big(\mathcal{F}(f(x))\Big) * \mathcal{F}^{-1}\Big(e^{-t\omega^2}\Big) \\
&= f(x) * \Big(\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\Big) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\, t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\, d\xi
\end{aligned}$$

۲ ۲ ۲ ۲

۳. مطلوب است حل معادله‌ی دیفرانسیل پاره ای $r^{۲}u_{rr}+ru_r+u_{\theta\theta}=۰$ برای $r>۴$ و $۰<\theta<\pi$ با شرطهای $u(r,۰)=۰$ و $u(r,\pi)=۰$ و $u(۴,\theta)=\theta$ که u تابعی کراندار و نسبت به θ متناوب است.

۲ اگر $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$ آنگاه $u_r(r,\theta)=R'(r)\Theta(\theta)$ و $u_{rr}(r,\theta)=R''(r)\Theta(\theta)$ و به همین ترتیب $u_{\theta,\theta}(r,\theta)=R(r)\Theta''(\theta)$. و در نتیجه:

$$\frac{r^{۲}R''+rR'}{R}=-\frac{\Theta}{\Theta}=\lambda$$

۲

به این ترتیب به مساله اشتورم لیوویل منظم $\Theta''+\lambda\Theta=۰$ با شرایط مرزی $\Theta(۰)=۰=\Theta(\pi)$ دست می یابیم. با حل آن مقادیر ویژه $\lambda_n=n^{۲}$ ۱ و توابع ویژه ۲ $\Theta_n(\theta)=\sin n\theta$ ۱ به دست می آیند که $n=۱,۲,\cdots$ اکنون برای ۲ $\lambda_n=n^{۲}$ معادله $r^{۲}R''+rR'-n^{۲}R=۰$ حاصل میشود که جواب آن $R(r)=c_۱r^n+c_۲r^{-n}$ است. چون $R(r)$ کراندار است باید $c_۱=۰$ باشد و با انتخاب $c_۲=۱$ داریم $R_n(r)=r^{-n}$. در نتیجه $u_n(r,\theta)=r^{-n}\sin n\theta$ و از آنجا ۲

$$u(r,\theta)=\sum_{n=۱}^{\infty}a_nr^{-n}\sin n\theta$$

۲

از شرط مرزی $u(۴,\theta)=\theta$ نتیجه میگیریم:

$$\theta=\sum_{n=۱}^{\infty}a_n۴^{-n}\sin n\theta$$

۲

پس $a_n۴^{-n}$ ضریب فوریه سینوسی تابع $f(\theta)=\theta$ است. در نتیجه: ۲

$$a_n=\frac{۲}{۴^{-n}\pi}\int_{۰}^{\pi}\theta\sin n\theta\,d\theta=\frac{(-۴)^{n+۱}}{۲n}$$

از آنجا

$$u(r,\theta)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۴)^{n+۱}}{۲nr^n}\sin n\theta$$

۲

۴. مطلوب است حل معادله‌ی دیفرانسیل پاره ای $u_t - u_{xx} = 3xt + 1$ برای $t > 0$ و $0 < x < 1$ با شرطهای $u(0, t) = t$ و $u_x(1, t) = t^2$ و $u(x, 0) = x^2$.

ابتدا شرایط مرزی را همگن میکنیم. برای این منظور $\widehat{u}(x, t) = b(t)x + c(t)$ را به قسمی میابیم که $v(x, t) = u(x, t) - \widehat{u}(x, t)$ در یک معادله با شرایط همگن صدق کند.

$$u(0, t) - \widehat{u}(0, t) = 0 \Longrightarrow c(t) = t \quad , u_x(1, t) - \widehat{u}_x(1, t) = 0 \Longrightarrow b(t) = t^2$$

۳

به این ترتیب $\widehat{u}(x, t) = t^2x + t$ و در نتیجه $u(x, t) = v(x, t) + t^2x + t$. پس $u_t = v_t + 2tx + 1$ و $u_{xx} = v_{xx}$. با جایگذاری در معادله داریم $v_t - v_{xx} = tx$ و شرایط مرزی جدید عبارتند از $v(0, t) = 0$ و $v_x(1, t) = 0$. شرط اولیه جدید هم $v(x, 0) = x^2$ است. مساله اشتورم لیوویل نظیر معادله همگن با این شرایط عبارت است از $X'' + \lambda X = 0$ با شرط $X(0) = 0 = X'(0)$. ۳

۱ ۱ ۱ ۱

پس برای $n = 0, 1, 2, \cdots$ داریم $\lambda_n = (n + \frac{1}{2})^2\pi^2$ و $X_n = \sin(n + \frac{1}{2})\pi x$. در فضای ضرب داخلی $PC([0, 1], \mathbb{R})$ با ضرب داخلی $\langle , \rangle$ داریم:

$$||X_n|| = \sqrt{\int_0^1 X_n^2(x)dx} = \sqrt{\int_0^1 \sin^2(n + \frac{1}{2})\pi x \ dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۳

ضرایب فوریه تابع tx نسبت به $\mathcal{O} = \{\sqrt{2}X_0, \sqrt{2}X_1, \cdots\}$ عبارت است از:

$$c_n = \langle tx, \sqrt{2}X_n \rangle = \int_0^1 tx\sqrt{2} \sin(n + \frac{1}{2})\pi x \ dx = \frac{4\sqrt{2}(-1)^n t}{\pi^2(1 + 2n)^2}$$

فرض کنیم $v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\sqrt{2}X_n(x)$ باشد. از $v_t - v_{xx} = tx$ نتیجه میشود:

۱

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n'(t) + (n + \frac{1}{2})^2\pi^2 a_n(t)\right) \sin(n + \frac{1}{2})\pi x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4\sqrt{2}(-1)^n t}{\pi^2(1 + 2n)^2}\right) \sin(n + \frac{1}{2})\pi x$$

به این ترتیب داریم

۲

$$a_n'(t) + (n + \frac{1}{2})^2\pi^2 a_n(t) = \frac{4\sqrt{2}(-1)^n t}{\pi^2(1 + 2n)^2}$$

علاوه بر این $x^2 = v(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0)\sqrt{2}X_n(x)$. پس $a_n(0)$ ضریب فوریه x^2 است.

۲

$$a_n(0) = \langle x^2, \sqrt{2}X_n \rangle = \sqrt{2}\int_0^1 x^2 \sin(n + \frac{1}{2})\pi x \ dx = \frac{8\sqrt{2}(-1)^n}{\pi^2(1 + 2n)^2} - \frac{16\sqrt{2}}{\pi^3(1 + 2n)^3}$$

اکنون به ازای $P(t) = (n + \frac{1}{2})^2\pi^2$ و $Q(t) = \frac{4\sqrt{2}(-1)^n t}{\pi^2(1+2n)^2}$ و با توجه به مقدار $a_n(0)$ مقدار $a_n(t)$ سپس v و در نتیجه $u(x, t) = v(x, t) + t^2x + t$ به دست می آید.

۴

$$\begin{aligned} a_n(t) &= ce^{-\int(P(t)dt} + e^{-\int(P(t)dt} \int Q(t)e^{\int(P(t)dt}dt \\ &= e^{-(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 t}\left(c + \int(\frac{4\sqrt{2}(-1)^n t}{\pi^2(1 + 2n)^2})e^{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 t}dt\right) \end{aligned}$$

۵. معادله‌ی دیفرانسیل پاره ای $u_{tt}+u_t-u_{xx}=۰$ را برای $۰<t$ و $۰<x<۲$ با شرطهای $u(۰,t)=۰$ و $u_x(۲,t)=۰$ و $u(x,۰)=\sin^۲(\pi x)$ و $u_t(x,۰)=۱+\sin(۴\pi x)$ حل کنید.

۲ قرار میدهیم $u(x,t)=X(x)T(t)$. در این صورت $u_t=X(x)T'(t)$ و $u_{tt}=X(x)T''(t)$ و $u_{xx}=X''(x)T(t)$. با جایگذاری در معادله‌ی $u_{tt}+u_t-u_{xx}=۰$ نتیجه میشود:

$$\frac{T''(t)+T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

یا

$$\underbrace{X''(x)+\lambda X(x)=۰\ ,X(۰)=۰=X'(۲)}_{}\ ,\quad \underbrace{T''(t)+T'(t)+\lambda T=۰}_{}$$

۲ ۱

مساله اشتورم لیوویل منظم $X''(x)+\lambda X(x)=۰\ ,\ X(۰)=۰=X'(۲)$ برای $n=۱,۲,\cdots$ دارای مقادیر ویژه $\lambda_n=\frac{(۲n-۱)^۲\pi^۲}{۱۶}$ و توابع ویژه $X_n(x)=\sin(\frac{(۲n-۱)\pi x}{۴})$ است. به ازای این مقادیر ویژه معادله $T''(t)+T'(t)+\frac{(۲n-۱)^۲\pi^۲}{۱۶}T(t)=۰$ به دست می آید که چند جمله ای مشخص آن $r^۲+r+\frac{(۲n-۱)^۲\pi^۲}{۱۶}$ با ریشه های مختلط $r=-\frac{۱}{۲}\pm i\frac{\sqrt{(۲n-۱)^۲\pi^۲-۱}}{۴}$ است. به این ترتیب: ۱ ۱ ۱ ۱

$$T_n(t)=e^{-\frac{۱}{۲}t}\Big(a_n\cos(\frac{\sqrt{(۲n-۱)^۲\pi^۲-۱}}{۴}t)+b_n\sin(\frac{\sqrt{(۲n-۱)^۲\pi^۲-۱}}{۴}t)\Big)$$ ۲

$$u(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}e^{-\frac{۱}{۲}t}\Big(a_n\cos(\frac{\sqrt{(۲n-۱)^۲\pi^۲-۱}}{۴}t)+b_n\sin(\frac{\sqrt{(۲n-۱)^۲\pi^۲-۱}}{۲}t)\Big)\sin(\frac{\overset{(۲n-۱)}{\cancel{n}}\pi x}{۴})$$ ۱

از شرط مرزی $u(x,۰)=\sin^۲(\pi x)$ داریم $\sin^۲(\pi x)=u(x,۰)=\sum_{n=۱}^{\infty}a_n\sin(\frac{(۲n-۱)\pi x}{۴})$. ۱

۲ پس a_n ضریب فوریه تابع $\sin^۲(\pi x)$ نسبت به $\mathcal{O}=\{\frac{X_۱}{||X_۱||},\frac{X_۲}{||X_۲||},\cdots\}$ است.

$$||X_n||=\sqrt{\int_۰^۲X_n^۲(x)dx}=\sqrt{\int_۰^۲\sin^۲(\frac{(۲n-۱)\pi x}{۴})\,dx}=۱$$

$$a_n=\int_۰^۲\sin^۲(\pi x)\sin(\frac{(۲n-۱)\pi x}{۴})\,dx=\frac{-۱۲۸}{(۸n^۳-۱۲n^۲-۱۲۲n+۶۳)\pi}$$ ۲

به همین ترتیب از شرط مرزی $u_t(x,۰)=۱+\sin(۴\pi x)$ داریم:

$$۱+\sin(۴\pi x)=\sum_{n=۱}^{\infty}\Big(-\frac{a_n}{۲}+\sqrt{(۲n-۱)^۲\pi^۲-۱}\,\frac{b_n}{۴}\Big)\sin(\frac{(۲n-۱)\pi x}{۲})$$ ۱

۲

$$\begin{aligned}\frac{۶۴}{(۸n^۳-۱۲n^۲-۱۲۲n+۶۳)\pi}+\sqrt{(۲n-۱)^۲\pi^۲-۱}\,\frac{b_n}{۴}&=\langle ۱+\sin(۴\pi x),\sin(\frac{(۲n-۱)\pi x}{۴})\rangle\\&=\int_۰^۲(۱+\sin(۴\pi x))\sin(\frac{(۲n-۱)\pi x}{۴})\,dx\\&=-\frac{(-۱)^n(۳۲n-۱)-۴n^۲+۴n-۲۲۵}{(۲n-۱)(-۴n^۲+۴n-۲۲۵)\pi}\end{aligned}$$

از این معادله خطی b_n به دست می آید.