۱C) نقاطی که $\text{Log}(1+\frac{1}{z})$ تحلیلی نیست عبارت $\{0\} \cup \{z \mid Im(1+\frac{1}{z}) = 0 ,\ Re(1+\frac{1}{z}) \le 0\}$ می باشد.

۶ نمره

$$Im(1+\frac{1}{z}) = Im\left(1+\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = 0 \Rightarrow Im\left(1+\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0$$

۶ نمره

$$Re(1+\frac{1}{z}) = 1 + \frac{x}{x^2+y^2} \le 0 \overset{y=0}{\Rightarrow} 1 + \frac{1}{x} \le 0 \overset{x<0}{\Rightarrow} -1 \le x < 0$$

۶

حال توجه کنید $D_f = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ پس جواب عبارت است از

$$\mathbb{C}\setminus\{z : Im z = 0 ,\ -1 \le Re z \le 0\}$$

۲

ج ۲) الف)

$D = \{z : \frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \pi\}$

بگیرید $z = x + iy$

$$\Rightarrow f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

۵ نمره

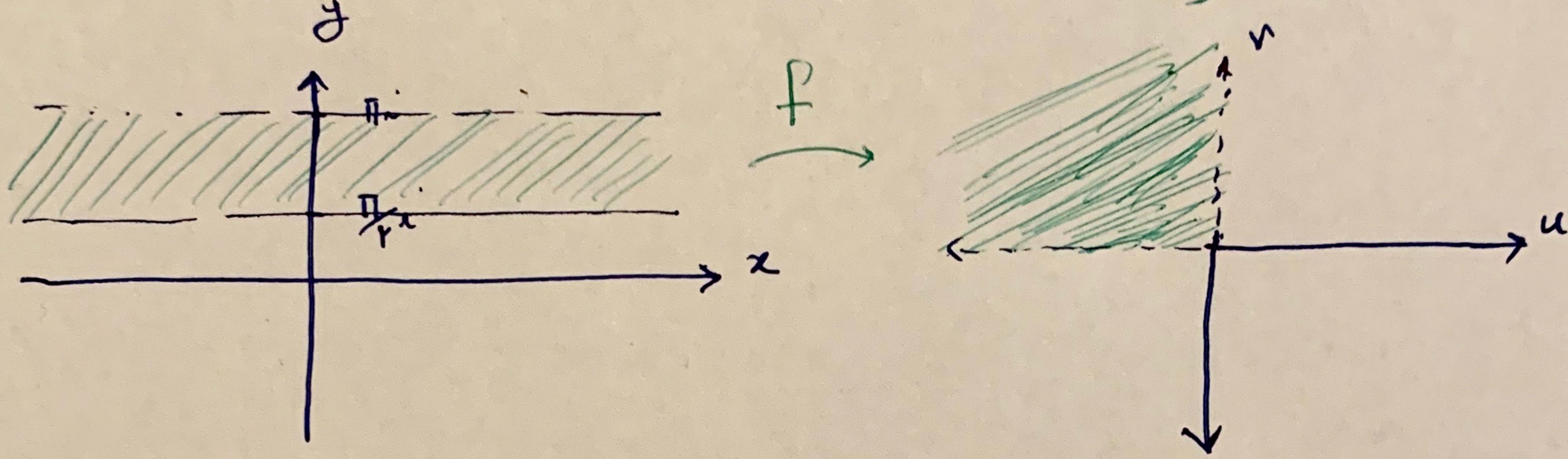
$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x \in (0, \infty)$$

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x \in (0,\infty) \\ \frac{\pi}{2} < y < \pi \Rightarrow -1 < \cos y < 0 \ , \quad 0 < \sin y < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} e^x \cos y < 0 \\ e^x \sin y > 0 \end{array}$$

پس

$$f(D) = \{z \mid \operatorname{Re} z < 0 , \operatorname{Im} z > 0\}$$

۵ نمره



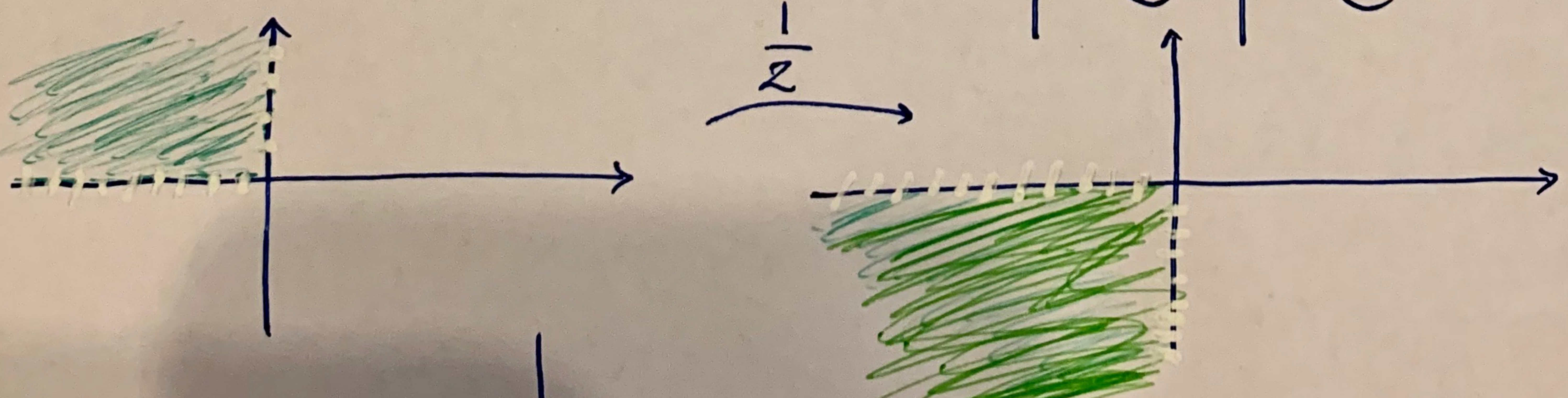
ب) چون $g(z) = \frac{1}{z}$ داریم $1 + e^{-z} = 1 + g(e^z)$. به عبارت دیگر بنابر الف تصویر ناحیه $\{z \mid \operatorname{Re} z < 0 , \operatorname{Im} z > 0\}$ را تحت نگاشت $1 + \frac{1}{z}$ بدست می آوریم:

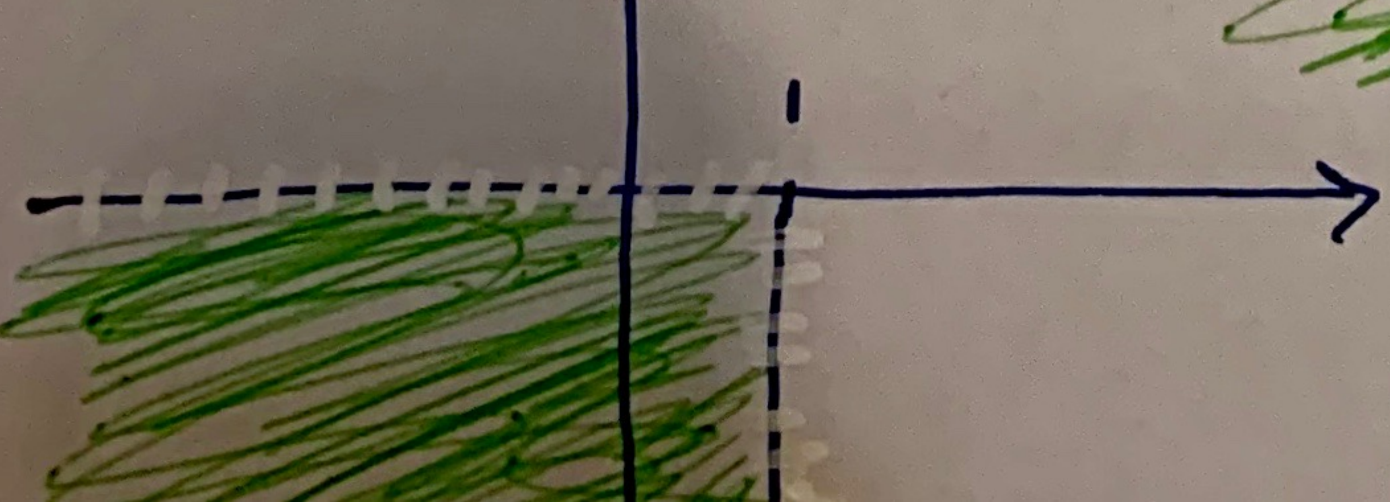
$$E = \{z \mid \operatorname{Re} z < 0 \ , \operatorname{Im} z > 0\} = \{re^{i\theta} \mid 0 < r , \frac{\pi}{2} < \theta < \pi\}$$

۵ نمره

$$g(re^{i\theta}) = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \ , \quad 0 < \frac{1}{r} \ , \ -\pi < -\theta < -\frac{\pi}{2}$$

یعنی تصویر ربع دوم، ربع سوم خواهد بود.





۵ نمره

ج ۳) با توجه به سؤال ① برای $\operatorname{Log}(1+\frac{1}{z})$ مشکلی نداریم. یعنی این تابع روی γ و داخل آن تحلیلی است. بنابر فرمول انتگرال کوشی برای $f(z)=\operatorname{Log}(1+\frac{1}{z})$ داریم:

$$I=\int_\gamma \frac{\operatorname{Log}(1+\frac{1}{z})}{(z-2)^2}=\frac{2\pi i}{1!}f'(z)\Big|_{z=2}$$ ۱۰

$$f'(z)=\frac{-\frac{1}{z^2}}{1+\frac{1}{z}}=\frac{-1}{z^2+z}\Rightarrow f'(2)=-\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow I=\frac{-2\pi i}{6}=\boxed{\frac{-\pi i}{3}}$$ ۱۰

ج٤) بسط حول نقطه $z_0 = 0$

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}$$ ۱۰

بسط حول نقطه‌ی $z_0 = 1$

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{-1}{z-1} \times \frac{1}{z-1+1} = \frac{-1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n}(z-1)^{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(z-1)^{n-1}$$ ۱۰

ج ۵)

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow \cosh \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{2n}}{(2n)!}$$

با توجه به $|z| = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (z)^n$$

$$\Rightarrow \frac{\cosh \frac{1}{z}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n}(2n)!} \times \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2!\, z^2} + \frac{1}{4!\, z^4} + \cdots\right)\left(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\right)$$

۸ نمره

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{\cosh \frac{1}{z}}{1-z}, 0\right) = \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$$

$$= \cosh 1 - 1$$

۷ نمره

حال با توجه به اینکه $z=0$ تنها نقطه ی تکین است، خواهیم داشت:

$$\int_{|z| = \frac{1}{2}} \frac{\cosh \frac{1}{z}}{1-z}\, dz = 2\pi i\,(\cosh 1 - 1)$$

۵ نمره

۱۰٫۷۵

ج ۶) تابع مذکور یک تابع زوج است ، در نتیجه

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos(3x)\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{1+x^4}\,dx$$ ۲ نمره

$$f(z) = \frac{e^{3zi}}{1+z^4}$$ ۱ نمره

این تابع چهار نقطه تکین ساده دارد:

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i},\quad z_2 = e^{\frac{3\pi}{4}i},\quad z_3 = e^{-\frac{\pi}{4}i},\quad z_4 = e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

۲ نمره

توجه کنید که تنها z_1 و z_2 در نیم صفحه ی بالایی واقع اند. ۱ نمره

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{3iz}}{z^4+1}, e^{\frac{\pi}{4}i}\right] = \frac{e^{3i(e^{\frac{\pi}{4}i})}}{4(e^{\frac{\pi}{4}i})^3} = \frac{e^{3i(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})}}{4e^{\frac{3\pi}{4}i}}$$

$$= \frac{1}{4}e^{\frac{3\sqrt{2}}{2}i}\cdot e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$ ۲

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{3iz}}{z^4+1}, e^{\frac{3\pi}{4}i}\right] = \frac{e^{3i(e^{\frac{3\pi}{4}i})}}{4(e^{\frac{3\pi}{4}i})^3} = \frac{e^{3i(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})}}{4e^{\frac{9\pi}{4}i}}$$

$$= \frac{1}{4}e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}i}\, e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$ ۲

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(3x)}{1+x^4}dx = \frac{2\pi i}{4}\left(e^{\frac{3\sqrt{2}}{2}i}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)+e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}i}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\cdot e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4}e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}\left(\sqrt{2}\cos\frac{3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$ ۲

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{3\sqrt{2}}{2}+\sin\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\times e^{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}$$